

Numéro d'enregistrement

au C.N.R.S.

A.O.3924

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Jean-Jacques FREY

PREMIERE THESE

ETABLISSEMENT D'UNE NOUVELLE EQUATION CINETIQUE
APPLICATION A LA DETERMINATION DES COEFFICIENTS DE VISCOSITE

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 5 février 1970 devant la Commission d'Examen

MM. YVON

Président

DELCROIX

SALMON

Examineurs

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Jean-Jacques FREY

PREMIERE THESE

ETABLISSEMENT D'UNE NOUVELLE EQUATION CINETIQUE

APPLICATION A LA DETERMINATION DES COEFFICIENTS DE VISCOSITE

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 5 février 1970 devant la Commission d'Examen

MM. YVON

Président

DELCROIX

SALMON

Examineurs

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen

M. ZAMANSKY

MM. GRASSE	T Evolution des êtres organisés	MM. OLMER	T Energétique générale	MM. NICOLAS	Géologie appliquée
PREVOST	T Chimie organique	GAUTHIER	T Mécanique appliquée	PANIGEL	Biologie générale
WYART	T Minéralogie & cristallographie	BACHEWITZ	T Chimie physique	RAVIER	T Pétrographie
TEISSIER	T Zoologie	BROSSEL	T Physique atomique	MOREL F.	T Physiologie comparée
AUGER	T Physique quantique & relativité	BUSER	T Physiologie comparée	ROSEAU	T Mécan. théorique des fluides
MONNIER	T Physiologie générale	CAMUS	T Physiologie végétale	ROUBINE	T Electronique E.S.E.
PIVETEAU	T Paléontologie	CURIEN	T Minéralogie & cristallographie	SILBER	T Chimie CPEM
ROCARD	T Physique E.N.S.	POSSOMPES	T Zoologie	UEBERSFELD	T Electronique
CARTAN	T Mathématiques E.N.S.	PULLMANN	T Chimie quantique	THIRY	T Mécanique céleste
LAFITTE	T Chimie générale	TEILLAC	T Phys. nucléaire & radioactivité	ABELES	T Physique SPCN
N...	T Géométrie supérieure	VILLE	T Econométrie	AMAT	T Thermodynamique
COULOMB	T Physique du globe	FREYMAN	T Recherches physiques	BALKANSKI	Physique M.P.C.
CRETEN	T Chimie minérale	ROLLET	T Chimie minérale	LE CORRE	T Electricité
BOCQUET	T Zoologie	ROSSEN	T Chimie SPCN	NATAF	T Physique nucléaire & radio-act.
KASTLER	T Physique E.N.S.	MM. CHEVALLEY	T Géométrie alg. & théo. des groupes	ECHALIER	T Thermodynamique
EPHRISSI	T Génétique	GERMAIN	T Mécan. Théo. des fluides	BARRAUD	T Physique CPEM
GAUTHERET	T Biologie végétale CPEM	LUCAS G.	T Géologie	DARS	Géo. structurale & appliquée
LUCAS R.	T Recherches physiques	ALLARD	T Chimie physique	CAMEFORT	T Biologie animale CPEM
THOMAS A.	T Biologie	BERTHELOT	T Physique des particules fonda.	GAUDEMAR	T Mécan. industrielle
MORAND	T Physique enseignement	BRICARD	T Météorologie	VICHNIEWSKY	Chimie SPCN
SOLEILLET	T Physique CPEM	Mme ALBE-FESSARD	T Psycho-physiologie	SIGWALT	Automatique
FORTIER	T Mécanique expérimentale des fluides	MM. JULIA	T Etude des molécules nat. com.	BLAQUIERE	Physique propédeutique
DRACH	T Biologie maritime	MAGAT	T Physico-chimie des rayonnements	BARUCH	T Physique théorique
QUENEY	T Météorologie & dynamique de l'atmosphère	MONOD	T Chimie du métabolisme	ARNOUS	Génétique
GALLIEN	T Chimie Physique	BRUN	T Mécanique des fluides I	SLONINSKI	T Math. propédeutique
MM. CAUCHOIS	T Physique du Globe	Mme DUBREIL	T Mathématiques (Agrégation)	MALLIAVIN	Chimie propédeutique
PONCIN	T Mécanique générale	Mme LELONG	T Mathématiques II E.N.S.	BROUSSE	T Mécanique théorique
DUBREIL	T Arithmétique & Théorie des nombres	MM. BELLAI	T Géologie S.P.C.N.	ROSCH	T Astronomie
GAGNIARD	T Géophysique appliquée	BOUSSIÈRES	T Radiochimie	GUY	T Physique expérimentale
CHAMPETIER	T Chimie macromoléculaire	Mme COUTURE	T Thermodynamique & mécan.	LAZARD	T Mathématiques MPC
CUVILLIER	T Micropaléontologie	MM. FRANC	T Biologie animale CPEM	MOREL P.	Physique MPC
TRILLAT	Microscopie & diffraction électronique	SCHNELL	T Biologie animale SPCN	ARSAC	Programmation
WIEMANN	T Chimie organique & structurale	STOLKOWSKI	T Géophysique ionosphère	LEFEBVRE	T Chimie MPC
VASSY	T Physique de l'atmosphère	ACHER	T Botanique	BOK	Physique fondamentale
DESTOUCHES	T Théorie physique	BAUDIN	T Physique MGP	CHAPEVILLE	Biochimie
AMIEL	T Chimie générale	BEAUMONT	T Géologie	BENOIT	Physique CPEM
MATHIEU J.P.	T Physique optique	BLAMONT	T Physiologie végétale	RIOT	Chimie CPEM
COUTEAUX	T Cytologie	BOUREAU	T Calcul des probabilités	JAUSEIN	Géologie ENS
CHOQUET	T Théorie des fonctions & topologie	CURIE D.	T Calcul différentiel & intégral	PREVOST G.	Biologie cellulaire
FELDMANN	T Biologie végétale marine	DURAND DELGA	T Physiologie végétale	FAVARD P.	Biologie animale CPEM
JOST	T Physiologie comparée	HELLER	T Physique électrique	Mme CHARNIAUX-COTTON	Evol. des êtres organisés
FORTET	T Calcul des probabilités & physique math.	TORTRAT	T Mécanique ondulatoire	MM. LEQUEUX	Chimie CPEM
SCHWARTZ	T Calcul différentiel & intégral	CAILLEUX	T Mécanique analytique et	COHEN TANNODJI	Astronomie
CHOUARD	T Physiologie végétale	MAGNAN	mécanique céleste	HERVE	T Mathématiques
MALAYARD	T Aviation (technique aéronautique)	DAUEL	T Mécan. Phys. et expérimentale	PECKER-WIMEL	T Astronomie
BRELOT	T Analyse supérieure	Mme CHOQUET	T Mécanique théorique	MM. TAVERNIER	Physique PC
EICHORN	T Botanique	BRUHAT	T Géo. phys. & géo. dynamique	DURAND M.	Biologie animale SPCN
BENARD	T Chimie appliquée	Mlle VEIL	T Mécanique des fluides	PASCAUD	Physiologie
DUGUE	T Statistique mathématique	MM. LWOFF	T Microbiologie	Mme PETIT	Biologie animale CPEM
SOUJAIAC	T Psychophysiologie	SIESTRUNCK	T Bio. vég. marine Villefranche s/mer	MM. CAGNAC	Electricité
ULRICH	T Psychophysiologie	CABANNES	T Chimie SPCN	FALK-VAIRANT	Physique nucléaire
KIRRMANN	T Physiologie végétale appliquée	CAIRE	T Chimie appliquée	M. BERGER	T Mathématiques
CHADEFAUD	T Théories chimiques	COMOLET	Riochimie	Mlle LIBERMANN	T Mathématiques
LE BRETON	T Botanique	DELLOUE	T Chimie organique	MM. DEDONDER	T Biologie cellulaire
LELONG	T Physiologie de la nutrition	HOULLON	T Chimie CPEM	DUFOR	T Electronique I.U.T.
DEVILLERS	T Application de l'analyse à la géométrie	OLIVIER	T Physique SPCN	SCHAAAL	Chimie CPEM
EHRESMANN	T Anatomie comparée	SAMUEL	T Géologie	BAUCHOT	Anatomie comparée
FRANÇON	T Topologie algébrique	DE POSSEL	T Phys. nucléaire & radio-act.	LANCE	CPEM
GLANGEAUD	T Physiologie SPCN	CHARLOT	T Bio. vég. marine Villefranche s/mer	GIRAUD	Botanique E.N.S.
GODEMENT	T Géographie physique, géologie dynamique	CHATELET	T Chimie appliquée	HULIN	Génétique
PIROT	T Mathématiques MGP	MATTLER	T Chimie SPCN	VIGIER	Biologie végétale
ROCH	T Technique mathématiques de la physique	AUBOUIN	T Chimie appliquée	GUERN	Physique CPEM
SCHATZMANN	T Géologie	Mme BENOIT-GEUTAL	Riochimie	SLODZIAN	Logique mathématique
TERMIER	T Astrophysique	MM. BOUCS	T Chimie SPCN	LACOMBE	Biologie cellulaire
ZAMANSKY	T Géologie générale	RIGAUDY	T Chimie appliquée	TAVLITZKI	Physique CPEM
LENNUIER	T Mathématiques générales	COLLONGUES	T Chimie appliquée	TAXI	B.A. CPEM
ROUTHIER	T Physique M.G.P.	DUBERT	T Chimie appliquée	COLLENOT	B.A. CPEM
MM. TONNELAT	T Géologie appliquée	NOZIERES	T Biochimie	BASSELER	Chimie propédeutique
DIXMIER	T Physique théorique	CADIOU	T Chimie fondamentale	BADOUAL	Electronique I.U.T.
SOUCHAY	T Mathématiques M.P.C.	IVANOFF	T Chimie organique		
AIGRAIN	T Chimie générale	FRANÇOIS	T Chimie analytique		
BRUSSET	T Electrochimie	TALBOT	T Chimie CPEM		
LEVY	T Chimie systématique	Mme NOUGAREDE	T Chimie SPCN		
Mme CHAIX	T Chimie théorique des hautes énergies	MM. BRUHAT	T Chimie appliquée		
Mme HUREL PY	T Chimie biologique	FOURNET	T Chimie appliquée		
MM. PANNETIER	T Biologie végétale CPEM	DEHUEVELS	T Chimie appliquée		
NORMANT	T Chimie générale I	FURON	T Chimie appliquée		
YVON	T Synthèse organique	Mme GANS	T Chimie appliquée		
COTTE	T Théories physiques	MM. GENEVES	T Chimie appliquée		
DUBOIS J.E.	T Physique électrique	HUPE	T Chimie appliquée		
LAMOTTE	T Chimie organique physique	HOLLANDE	T Chimie appliquée		
	T Zoologie E.N.S.	LIONS	T Chimie appliquée		
		MAITTE	T Chimie appliquée		

Le Secrétaire Général

R. POULLAIN

J'exprime ma profonde gratitude à Monsieur BERGER, Directeur du Centre de Limeil et Monsieur LAURENT, Directeur du Centre de Bruyères-le-Châtel, pour m'avoir permis d'exécuter ce travail.

Je suis heureux de remercier très vivement Monsieur le Professeur YVON du grand honneur qu'il a bien voulu me faire en présidant mon jury, et de lui exprimer ma profonde reconnaissance pour l'intérêt qu'il a toujours porté à mes recherches.

A Monsieur le Professeur SALMON, qui m'a signalé l'intérêt de cette question et qui m'a toujours encouragé et guidé dans la réalisation de ce travail, j'adresse l'expression de ma sincère gratitude et mes remerciements les plus vifs.

Je suis particulièrement reconnaissant à Monsieur le Professeur DELCROIX d'avoir bien voulu être Membre de ce jury.

Je remercie non moins vivement Mademoiselle DICHAMPT et Monsieur HUC des Laboratoires d'Analyse Numérique du C.E.A., Monsieur VALTON du Laboratoire d'Electronique et de Physique Appliquée de Limeil-Brévannes, Monsieur LAIGLE et Monsieur GARNACHE dont la collaboration m'a été précieuse.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550203_0020

TABLE DES MATIERES

	Pages
I - GENERALITES	7
I.1. - Introduction	7
I.2. - Définitions et notations	8
II - HYPOTHESE F.S.	11
II.1. - Position du problème	11
II.2. - Equations de BHATNAGAR et de VLASOV	12
II.3. - Hypothèse F.S.	15
III - EQUATION CINETIQUE	21
III.1. - Position du problème	21
III.2. - Etablissement de l'équation cinétique	21
III.3. - Equation cinétique simplifiée	22
IV - LES EQUATIONS DE LA MECANIQUE DES FLUIDES	25
IV.1. - Position du problème	25
IV.2. - Equation de conservation des particules	25
IV.3. - Equation de transport de la quantité de mouvement	26
IV.4. - Equation de transport de la pression cinétique	27
IV.5. - Invariants collisionnels	28
IV.6. - Théorème H	28
V - DETERMINATION DES COEFFICIENTS DE VISCOSITE	31
V.1. - Position du problème	31
V.2. - Calcul des coefficients de viscosité cinétique	31
V.3. - Calcul des coefficients de viscosité interparticulaire	33

VI - DETERMINATION DU TEMPS COLLISIONNEL	35
VI.1. - Cas des gaz dilués	35
VI.2. - Cas des liquides	42
VI.3. - Cas des gaz modérément denses	42
VII - COMPARAISON AVEC L'EXPERIENCE	45
VII.1. - Expression finale des coefficients de viscosité	45
VII.2. - Comparaison avec l'expérience - Cas des gaz dilués	49
VII.3. - Cas des liquides	59
VII.4. - Cas des gaz modérément denses	61
CONCLUSION	65
BIBLIOGRAPHIE	67

ETABLISSEMENT D'UNE NOUVELLE EQUATION CINETIQUE

APPLICATION A LA DETERMINATION DES COEFFICIENTS DE VISCOSITE

Chapitre I

GENERALITES

I.1. - INTRODUCTION

L'établissement d'une équation cinétique gouvernant la fonction de distribution simple d'un fluide se fait en introduisant des hypothèses qui permettent, dans la première équation B.B.G.K.Y., d'exprimer le terme de collision en substituant à la fonction de distribution double qui y figure une expression qui ne contienne plus que la fonction de distribution simple. Ces hypothèses doivent en outre traduire les phénomènes d'irréversibilité dont le système B.B.G.K.Y. dans sa forme rigoureuse ne rend pas compte.

Parmi les équations cinétiques déjà établies, la plus célèbre est celle de BOLTZMANN. Le passage des équations de B.B.G.K.Y. à l'équation de BOLTZMANN a fait l'objet de nombreux travaux. J.YVON [1] suppose la densité du fluide assez faible pour ne tenir compte que des collisions binaires et postule le principe du chaos moléculaire. La méthode de J.G. KIRKWOOD [2] repose essentiellement sur le remplacement de la notion de fonction de distribution par celle de moyenne temporelle de ces fonctions sur un intervalle de temps. Enfin les traits essentiels de la méthode de N. BOGOLIUBOV [3] sont la définition de trois échelles de temps distinguant plusieurs étapes dans l'évolution du fluide et le développement des fonctions de distribution en série de puissances de la concentration.

A partir de l'équation de BOLTZMANN, on déduit les équations de BHATTAGAR et FOKKER-PLANCK qui se sont révélées bien adaptées à quelques problèmes. Enfin VLASOV, en négligeant les corrélations entre particules, a proposé une équation formellement identique à l'équation de BOLTZMANN sans second membre.

La présente thèse est consacrée à la présentation d'une nouvelle

équation cinétique qui se rattache aux équations de VLASOV, BHATNAGAR et FOKKER-PLANCK et à l'application de cette équation à la détermination des coefficients de viscosité d'un fluide.

I.2. - DEFINITIONS ET NOTATIONS

Soit N le nombre de molécules (numérotées de 1 à N) du fluide à un seul composant. Nous les traitons comme des points matériels et nous caractérisons alors l'état de chacune d'entre elles par un vecteur position $\vec{x}$ et un vecteur vitesse $\vec{w}$. L'état du système à un instant t est donc défini par la donnée de l'ensemble des vecteurs

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N$$

$$\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_N$$

Leurs composantes cartésiennes sont désignées par

$$x_{i,s}; w_{i,s}$$

Le premier indice étant relatif au numéro de la composante et le second au numéro de la particule.

Sur la particule de numéro s s'exercent une force extérieure $\vec{X}_s$ ne dépendant pas de la vitesse dont les composantes sont désignées par $X_{i,s}$, ainsi que des forces d'interaction à caractère central dont les composantes sont désignées par $X_{i,st}, X_{i,su}, \dots$; ces forces dérivent d'un potentiel central du type φ_{st} avec :

$$(1,1) \quad \vec{X}_{st} = \frac{d\varphi_{st}}{dr_{st}} \frac{\vec{r}_{st}}{r_{st}} \quad \vec{r}_{st} = \vec{x}_t - \vec{x}_s$$

Les fonctions de distribution simple, double ..., d'ordre s sont désignées par

$$f_1, f_{12}, \dots, f_{12\dots s}$$

Au point $\vec{x}_1$, les grandeurs macroscopiques en jeu sont :

la densité particulaire simple

$$(1,2) \quad n_1 = \int f_1 \, d\vec{w}_1$$

le vecteur vitesse moyenne

$$(1,3) \quad v_{k,1} = \frac{1}{n_1} \int w_{k,1} f_1 \, d\vec{w}_1$$

et en désignant par $\vec{V}_1$, le vecteur vitesse relative

$$(1,4) \quad \vec{V}_1 = \vec{w}_1 - \vec{v}_1$$

le tenseur de pression cinétique

$$(1,5) \quad p_{kl,1} = \int m V_{k,1} V_{l,1} f_1 \underline{dw}_1$$

le tenseur de flux d'énergie thermique

$$(1,6) \quad p_{klr,1} = \int m V_{k,1} V_{l,1} V_{r,1} f_1 \underline{dw}_1$$

la pression cinétique scalaire

$$(1,7) \quad p_1 = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{k=3} p_{kk,1}$$

La température cinétique

$$T_1 = \frac{p_1}{K n_1}$$

K désignant la constante de BOLTZMANN.

Nous utiliserons également le tenseur de pression interparticulaire $\pi_{kl,1}$ dont l'expression en milieu homogène est

$$(1,8) \quad \pi_{kl,1} = - \frac{1}{2} \int X_{k,12} (x_{l,2} - x_{l,1}) n_{12} \underline{dr}$$

n_{12} étant la densité double

$$n_{12} = \int f_{12} \underline{dw}_1 \underline{dw}_2$$

$$\text{et } \vec{r} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$$

Chapitre II

HYPOTHESE F.S.

Dans ce chapitre, après avoir rappelé les hypothèses et les approximations qui conduisent à un certain nombre d'équations cinétiques usuelles, nous exposons l'approximation qui nous permet d'obtenir une nouvelle relation de fermeture désignée par "hypothèse F.S."

II.1. - POSITION DU PROBLEME

Considérons un fluide constitué de N particules identiques. La densité en phase $D(t; \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N; \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_N)$ obéit à l'équation de Liouville

$$(2,1) \quad \frac{dD}{dt} = 0$$

c'est-à-dire

$$(2,1 \text{ bis}) \quad \hat{S}_{12..N} D = \frac{\partial D}{\partial t} + \sum_i \vec{w}_i \cdot \frac{\partial D}{\partial \vec{x}_i} + \sum_i \frac{\vec{x}_i + \sum_{i \neq j} \vec{x}_{ij}}{m} \cdot \frac{\partial D}{\partial \vec{w}_i} = 0$$

qui décrit dans l'espace des phases l'évolution de D .

D'une façon générale nous faisons appel aux notations condensées, mais en cas d'ambiguïté nous utilisons le formalisme tensoriel ¹⁾.

Seules les fonctions de distribution portant sur un petit nombre de particules jouent un rôle majeur ; on est alors amené à tirer de l'équation de Liouville, par intégrations successives, les équations vérifiées par les fonctions de distributions à s particules avec $s \leq N$. Les équations ainsi déduites sont les équations de B.B.G.K.Y.

$$(2,2) \quad \hat{S}_1 f_1 = \hat{G}_1 f_{12}$$

¹⁾ On entend par là, la sommation systématique sur les indices répétés.

$$(2,3) \quad \hat{S}_{12} f_{12} = \hat{G}_{13} f_{123}$$

... etc $\hat{S}_1, \hat{G}_1, \hat{S}_{12}, \hat{G}_{12}$... désignant les opérateurs.

$$\hat{S}_1 = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{w}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} + \frac{\vec{x}_1}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{w}_1}$$

$$(2,4) \quad \hat{S}_{12} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{w}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} + \vec{w}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}_2} + \frac{\vec{x}_1 + \vec{x}_{12}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{w}_1} + \frac{\vec{x}_2 + \vec{x}_{21}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{w}_2}$$

$$\hat{G}_1 f_{12} = - \int \frac{\vec{x}_{12}}{m} \cdot \frac{\partial f_{12}}{\partial \vec{w}_1} \underline{dx}_2 \underline{dw}_2$$

$$\hat{G}_{12} f_{123} = - \int \frac{\vec{x}_{13}}{m} \cdot \frac{\partial f_{123}}{\partial \vec{w}_1} \underline{dx}_3 \underline{dw}_3 - \int \frac{\vec{x}_{23}}{m} \cdot \frac{\partial f_{123}}{\partial \vec{w}_2} \underline{dx}_3 \underline{dw}_3$$

Deux remarques s'imposent :

- A partir de l'équation de Liouville, on obtient par la méthode régressive un système infini d'équations plus simples mais couplées de proche en proche.

- L'équation de Liouville et la chaîne d'équations B.B.G.K.Y. sont réversibles et cette réversibilité de l'évolution est contredite par l'expérience.

Ainsi, pour parvenir à un système d'équations fini et résolvable, il y a lieu d'introduire des hypothèses de fermeture. Celles-ci doivent être choisies de manière à traduire l'irréversibilité.

L'hypothèse présentée dans ce chapitre porte sur le terme collisionnel $\hat{G}_{12} f_{123}$ que nous exprimerons en fonction de f_1 et f_{12} . Nous trouverons ensuite une solution approchée de l'équation (2,3) ainsi obtenue qu'exprime à son tour f_{12} en fonction de f_1 et f_2 .

En reportant cette expression de f_{12} dans la première équation B.B.G.K.Y., il vient une nouvelle équation cinétique.

Auparavant, nous allons rappeler l'équation de BHATNAGAR car l'hypothèse qui permet de l'établir contient une idée qui nous sera utile. Il en est de même pour l'équation de VLASOV.

II.2. - EQUATIONS DE BHATNAGAR ET DE VLASOV

II.2.1. - Equation de Bhatnagar

Dans l'équation cinétique proposée par BHATNAGAR, GROSS et KROOK [4]

le terme de collision $\hat{G}_1 f_{12}$ est remplacé par

$$-V(f_1 - f_1^m)$$

où V est un paramètre (fréquence de collision) qui peut être fonction de la densité particulaire, de la température cinétique, et, éventuellement du module de $\vec{w}_1$; et où f_1^m est le produit de la densité simple $n_1(\vec{x}_1, t)$ et de la fonction de Maxwell caractérisant l'équilibre local

$$f_1^m = n_1(\vec{x}_1, t) \left(\frac{m}{2\pi KT_1} \right)^{3/2} \exp - \left\{ \frac{m(\vec{w}_1 - \vec{v}_1)^2}{2KT_1} \right\}$$

$T_1(\vec{x}_1, t)$ étant la température cinétique définie par la relation

$$\frac{3}{2} KT_1 = \frac{1}{n_1} \int \frac{1}{2} m (\vec{w}_1 - \vec{v}_1)^2 f_1 d\vec{w}_1$$

Posant
$$V = \frac{1}{\tau_0}$$

(2,5) il vient
$$\hat{S}_1 f_1 + \frac{f_1 - f_1^m}{\tau_0} = 0$$

On voit que l'hypothèse à la base de l'équation (2,5) traduit l'existence d'une durée de relaxation.

τ_0 qui correspond à un retour vers l'état d'équilibre maxwellien f_1^m de la fonction perturbée f_1 .

τ_0 désigne une quantité voisine de l'intervalle de temps moyen qui sépare deux collisions.

Cette équation se révèle utile dans les problèmes très ardues où seuls les schémas purement numériques s'imposent.

Notons que le modèle général, où V est fonction de w_1 , ne satisfait ni aux relations de conservation ni au théorème H. Toutefois, si l'on s'en tient au cas où V ne dépend pas de w_1 , l'équation (2,5) jouit des propriétés de conservation.

II.2.2. - Equation de Vlasov

Dans le terme de collision $\hat{G}_1 f_{12}$, posons

$$f_{12} = f_1 f_2$$

on obtient

$$\hat{G}_1 f_{12} = - \frac{\partial f_1}{\partial \vec{w}_1} \cdot \int f_2 \frac{\vec{X}_{12}}{m} \underline{dx}_2 \underline{dw}_2$$

et comme $\vec{X}_{12}$ est indépendant des vitesses

$$\hat{G}_1 f_{12} = - \frac{\vec{X}_1'}{m} \frac{\partial f_1}{\partial \vec{w}_1} \quad \text{avec} \quad \vec{X}_1' = \int n_2 \vec{X}_{12} \underline{dx}_2$$

d'où l'équation de VLASOV

$$(2,6) \quad \frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{w}_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{x}_1} + \frac{\vec{X}_1 + \vec{X}_1'}{m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{w}_1} = 0$$

Ainsi pour obtenir l'équation de VLASOV, nous avons réduit les phénomènes d'interaction entre particules à un champ collectif. Cette équation, formellement identique à l'équation de Boltzmann sans second membre, n'est pas en mesure de traduire l'irréversibilité. Elle permet d'étudier de façon self-consistante les mouvements collectifs d'un gaz de particules chargées.

II.2.3. - Equation de Bhatnagar - Vlasov

A l'équilibre thermodynamique, la fonction de distribution double s'écrit

$$(2,7) \quad f_{12} = f_1^m f_2^m \Psi_{12}$$

f_1^m et f_2^m désignant les fonctions de distribution maxwelliennes et Ψ_{12} le coefficient de corrélation à l'équilibre.

Considérons un fluide "isotherme" et hors de l'équilibre. La température cinétique définie par la relation

$$\frac{3}{2} K T_1 = \frac{1}{n_1} \int \frac{1}{2} m v_1^2 f_1 \underline{dw}_1$$

est uniforme et stationnaire.

Pour un tel fluide, il est loisible d'écrire

$$f_{12} = f_1 f_2 \Psi_{12} + x_{12}$$

d'où

$$(2,8) \quad \hat{G}_1 f_{12} = \hat{G}_1 f_1 f_2 \Psi_{12} + \hat{G}_1 x_{12}$$

Introduisons l'hypothèse de BHATNAGAR

$$\hat{G}_1 x_{12} + \frac{f_1 - f_1^m}{\tau_0} = 0$$

Il en résulte l'équation que nous appellerons équation cinétique de BHATNAGAR-VLASOV

$$(2,9) \quad \hat{S}_1 f_1 - \hat{G}_1 f_1 f_2 \Psi_{12} + \frac{f_1 - f_1^m}{\tau_0} = 0$$

Cette équation contient un terme de champ collectif qui s'annule pour un fluide homogène et isotrope et un terme d'irréversibilité. Mais en raisonnant directement sur le terme de collision de la première équation B.B.G.K.Y., nous avons perdu de l'information.

L'hypothèse F.S., présentée dans le paragraphe qui suit, est du type BHATNAGAR-VLASOV, mais elle est appliquée à la seconde équation B.B.G.K.Y. et non à la première, le temps caractéristique étant alors la durée d'une collision et non plus la durée entre deux collisions. En outre, nous ne ferons plus appel aux fonctions de Maxwell caractérisant l'équilibre local.

II.3. - HYPOTHESE F.S.

On se limite à l'étude de l'évolution du système au voisinage de l'équilibre thermodynamique.

Reprenons le mode de raisonnement ayant conduit à l'établissement de l'équation cinétique de BHATNAGAR-VLASOV.

Considérons le voisinage du point 1 dans lequel les gradients de température cinétique sont faibles.

La fonction de distribution triple des particules contenues dans ce volume peut se mettre sous la forme,

$$f_{123} = f_{123}^{(0)} + \chi_{123}$$

dans laquelle $f_{123}^{(0)}$ est la fonction de distribution triple sans corrélations de vitesse définie par

$$(2,7 \text{ bis}) \quad f_{123}^{(0)} = f_1 f_2 f_3 \Psi_{123}$$

Ψ_{123} étant le coefficient de corrélation triple à l'équilibre calculé pour la température cinétique T_1 au point $\vec{x}_1$ définie par la relation

$$\frac{3}{2} kT_1 = \frac{1}{n_1} \int \frac{1}{2} m v_1^2 f_1(\vec{x}_1, \vec{w}_1, t) d\vec{w}_1$$

Considérons le terme de collision de la deuxième équation de B.B.G.K.Y.

$$\hat{G}_{12} f_{123} = \hat{G}_{12} f_{123}^{(0)} + \hat{G}_{12} \chi_{123}$$

L'hypothèse F.S. consiste à écrire

$$\hat{G}_{12} f_{123} = \frac{1}{\tau} \left[f_{12}^{(0)} - f_{12} \right]$$

avec $f_{12}^{(0)} = f_1 f_2 \Psi_{12}$

Ψ_{12} étant le coefficient de corrélation double à l'équilibre à la température T_1 .

Ainsi, nous remplaçons le terme intégral $\hat{G}_{12} f_{123}$ par la quantité

(2,8 bis) $\hat{G}_{12} f_{123} = \hat{G}_{12} f_{123}^{(0)} + \frac{1}{\tau} \left[f_{12}^{(0)} - f_{12} \right]$

Précisons les points suivants :

a) - τ désigne un intervalle de temps de l'ordre de la durée moyenne d'une collision que nous appelons temps collisionnel. Nous supposons pour simplifier qu'il ne dépend que des paramètres caractéristiques du potentiel d'interaction de la température T_1 et pour les gaz denses de la densité particulaire.

b) - Les fonctions de distributions $f_{12}^{(0)}$ et $f_{123}^{(0)}$ sont de la forme

$$f_{12}^{(0)} = f_1(t; \vec{x}_1, \vec{w}_1) f_2(t; \vec{x}_2, \vec{w}_2) \Psi_{12}(t; \vec{x}_1, \vec{x}_2)$$

(2,7 bis)

$$f_{123}^{(0)} = f_1(t; \vec{x}_1, \vec{w}_1) f_2(t; \vec{x}_2, \vec{w}_2) f_3(t; \vec{x}_3, \vec{w}_3) \Psi_{123}(t; \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$$

rappelant ainsi celle de l'équilibre.

c) - Les fonctions Ψ_{12} et Ψ_{123} qui apparaissent dans les expressions (2,7 bis) sont les coefficients de corrélation à l'équilibre calculés pour la température T_1 .

Elles satisfont la relation

(2,10) $K T_1 \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial \vec{x}_1} = \vec{x}_{12} \Psi_{12} + \int \vec{x}_{13} n_3 \Psi_{123} d\vec{x}_3 - \Psi_{12} \int \vec{x}_{13} n_3 \Psi_{13} d\vec{x}_3$

dans laquelle ne figure pas la force $\vec{X}_1$.

d) - D'une façon générale les fonctions Ψ dépendent du temps par l'intermédiaire de la densité particulaire simple et de la température.

Compte tenu de cette hypothèse de fermeture la deuxième équation de B.B.G.K.Y. s'écrit

(2,11) $\hat{S}_{12} f_{12} = \hat{G}_{12} f_{123}^{(0)} + \frac{1}{\tau} \left[f_{12}^{(0)} - f_{12} \right]$

Le terme de collision comporte un terme réversible et un terme irréversible traduisant la relaxation vers l'équilibre lorsque disparaissent les causes d'écart à l'équilibre.

En l'absence de liaison statistique entre les points 1 et 2 le terme irréversible est nul

$$\frac{1}{\tau} \left[f_{12}^{(o)} - f_{12} \right] = 0$$

et l'équation (2,11) est équivalente à l'équation de Boltzmann sans second membre du type VLASOV.

Reprenons l'équation (2,11). Il vient

$$(2,11 \text{ bis}) \quad f_{12} = f_{12}^{(o)} - \tau \left[\hat{S}_{12} f_{12} - \hat{G}_{12} f_{123}^{(o)} \right]$$

Nous nous intéressons à l'évolution du système au voisinage de l'équilibre thermodynamique, ce qui nous permet de substituer dans (2,11 bis) la quantité $f_{12}^{(o)}$ à la quantité f_{12} .

On écrit finalement

$$(2,12) \quad f_{12} = f_{12}^{(o)} - \tau \left[\hat{S}_{12} f_{12}^{(o)} - \hat{G}_{12} f_{123}^{(o)} \right]$$

Telle est l'hypothèse de fermeture F.S. sous sa forme générale. Les fonctions de distributions doubles se présentent comme une fonctionnelle des fonctions de distribution simple avec un terme semblable à celui qu'on obtient à l'équilibre et un terme supplémentaire.

On vérifie sans peine qu'à l'équilibre cette relation de fermeture est vérifiée.

Explicitons (2,12)

$$f_{12} = f_1 f_2 \Psi_{12} - \tau \left[\hat{S}_{12} f_1 f_2 \Psi_{12} - \hat{G}_{12} f_1 f_2 f_3 \Psi_{123} \right]$$

soit encore, compte tenu de (2,4)

$$f_{12} = f_1 f_2 \Psi_{12}$$

$$(2,13) \quad \begin{aligned} & -\tau \left[f_2 \Psi_{12} \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{w}_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{x}_1} + \frac{\vec{x}_1}{m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{w}_1} \right) + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial \vec{w}_1} \cdot \int \frac{\vec{x}_{13}}{m} n_3 \Psi_{123} dx_3 \right] \\ & -\tau \left[f_1 \Psi_{12} \left(\frac{\partial f_2}{\partial t} + \vec{w}_2 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \vec{x}_2} + \frac{\vec{x}_2}{m} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \vec{w}_2} \right) + f_1 \frac{\partial f_2}{\partial \vec{w}_2} \cdot \int \frac{\vec{x}_{23}}{m} n_3 \Psi_{123} dx_3 \right] \\ & -\tau \left[f_1 f_2 \left(\frac{\partial \Psi_{12}}{\partial t} + \vec{w}_1 \cdot \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial \vec{x}_1} + \vec{w}_2 \cdot \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial \vec{x}_2} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\vec{x}_{12}}{m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{w}_1} f_2 \Psi_{12} + \frac{\vec{x}_{21}}{m} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \vec{w}_2} f_1 \Psi_{12} \right] \end{aligned}$$

Dans ce développement nous voyons apparaître $\hat{S}_1 f_1$ et $\hat{S}_2 f_2$. Nous leur substituons le terme collisionnel de la première équation de B.B.G.K.Y. et nous obtenons, par itération, le développement en τ de la fonction de distribution double f_{12} .

Soulignons que l'extraction de τ des intégrales $\hat{G}$ ne pose aucun problème compte tenu du domaine d'intégration restreint.

La nouvelle expression de la relation de fermeture, au premier ordre en τ se déduit donc de (2,13) en remplaçant $\hat{S}_1 f_1$ et $\hat{S}_2 f_2$ respectivement par $\hat{G}_1 f_{12}^{(0)}$ et $\hat{G}_2 f_{12}^{(0)}$.

Il vient la relation de fermeture

$$(2,14) \quad \begin{aligned} f_{12} = f_1 f_2 \Psi_{12} & -\tau \left[f_1 f_2 \left(\frac{\partial \Psi_{12}}{\partial t} + \vec{w}_1 \cdot \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial \vec{x}_1} + \vec{w}_2 \cdot \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial \vec{x}_2} \right) + \frac{\vec{x}_{12}}{m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{w}_1} f_2 \Psi_{12} \right. \\ & + \frac{\vec{x}_{21}}{m} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \vec{w}_2} f_1 \Psi_{12} + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial \vec{w}_1} \cdot \int \frac{\vec{x}_{13}}{m} n_3 \Psi_{123} dx_3 \\ & \left. + f_1 \frac{\partial f_2}{\partial \vec{w}_2} \cdot \int \frac{\vec{x}_{23}}{m} n_3 \Psi_{123} dx_3 \right] \\ & +\tau \left[f_2 \Psi_{12} \frac{\partial f_1}{\partial \vec{w}_1} \cdot \int \frac{\vec{x}_{13}}{m} n_3 \Psi_{13} dx_3 + f_1 \Psi_{12} \frac{\partial f_2}{\partial \vec{w}_2} \cdot \int \frac{\vec{x}_{23}}{m} n_3 \Psi_{23} dx_3 \right] \end{aligned}$$

Notons que par intégration dans l'espace des vitesses $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$, nous obtenons l'expression suivante de la densité double

$$(2,15) \quad n_{12} = n_1 n_2 \Psi_{12} - \tau n_1 n_2 \left[\frac{\partial}{\partial t} \Psi_{12} + \vec{v}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} \Psi_{12} + \vec{v}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}_2} \Psi_{12} \right]$$

L'expression (2,14) exprime f_{12} en fonction de f_1 , f_2 et des coefficients de corrélation qui sont connus avec une bonne approximation dans de nombreux cas. Le report de l'expression (2,14) dans la première équation B.B.G.K.Y. fournit l'équation cinétique F.S.

Autres expressions de la relation de fermeture :

- Nous avons vu que les fonctions Ψ_{12} et Ψ_{123} étaient liées par la relation (2,10)

$$KT_1 \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial \vec{x}_1} = \vec{x}_{12} \Psi_{12} + \int \vec{x}_{13} n_3 \Psi_{123} d\vec{x}_3 - \Psi_{12} \int \vec{x}_{13} n_3 \Psi_{13} d\vec{x}_3$$

à laquelle correspond une relation identique obtenue en permutant les indices 1 et 2 et en tenant compte de l'invariance de Ψ_{12} et Ψ_{123} dans cette permutation.

$$KT_1 \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial \vec{x}_2} = \vec{x}_{21} \Psi_{12} + \int \vec{x}_{23} n_3 \Psi_{123} d\vec{x}_3 - \Psi_{12} \int \vec{x}_{23} n_3 \Psi_{23} d\vec{x}_3$$

Considérons les relations (2,14) et (2,10) et éliminons Ψ_{123} . La relation de fermeture se met enfin sous la forme

$$(2,16) \quad f_{12} = f_1 f_2 \Psi_{12} - \tau \left\{ f_1 f_2 \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial t} + f_2 (\vec{w}_1 f_1 + \frac{KT_1}{m} \frac{\partial f_1}{\partial \vec{w}_1}) \cdot \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial \vec{x}_1} + f_1 (\vec{w}_2 f_2 + \frac{KT_1}{m} \frac{\partial f_2}{\partial \vec{w}_2}) \cdot \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial \vec{x}_2} \right\}$$

- Lorsque le fluide est peu dense ou homogène, Ψ_{12} ne dépend que du module du vecteur $\vec{x}_2 - \vec{x}_1$.

La relation de fermeture (2,16) se simplifie encore et prend la forme

$$(2,17) \quad f_{12} = f_1 f_2 \Psi_{12} - \tau \left\{ f_1 f_2 \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial t} + \frac{d \Psi_{12}}{dr} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \left[- (\vec{w}_1 f_1 + \frac{KT_1}{m} \frac{\partial f_1}{\partial \vec{w}_1}) f_2 + (\vec{w}_2 f_2 + \frac{KT_1}{m} \frac{\partial f_2}{\partial \vec{w}_2}) f_1 \right] \right\}$$

Rappelons que les relations de fermeture (2,14), (2,16), et (2,17) que nous venons d'établir ne sont justifiées que dans un voisinage du point 1 à gradient de température faible.

Chapitre III

EQUATION CINETIQUE

III.1. - POSITION DU PROBLEME

Dans le chapitre précédent nous avons proposé la relation de fermeture (2,12). Elle nous permet d'obtenir par substitution une expression approchée du terme de collision de la première équation de B.B.G.K.Y., dans laquelle ne figure plus que la fonction de distribution f_1 conduisant ainsi à une nouvelle équation cinétique.

III.2. - ETABLISSEMENT DE L'EQUATION CINETIQUE

Cette équation est obtenue en substituant l'expression (2,12) dans la première équation de B.B.G.K.Y.

$$(2,2) \quad \hat{S}_1 f_1 = \hat{G}_1 f_{12}$$

Remarquons que, par suite de la présence dans les intégrales $\hat{G}_1 f_{12}$ des composantes de la force interparticulaire

$$\vec{X}_{12} = \frac{d\varphi_{12}}{dr} \frac{\vec{r}}{r}$$

le domaine d'intégration est borné par la portée des forces interparticulaires. En admettant que dans la région intéressée la température cinétique des particules varie peu à l'échelle d'une distance de l'ordre de cette portée, nous avons le droit d'effectuer cette substitution car l'expression (2,12) a été établie pour un milieu à faible gradient de température.

L'équation cinétique est de la forme

$$(3,1) \quad \hat{S}_1 f_1 = \hat{G}_1 f_{12}^{(0)} - \hat{G}_1 \tau \left[\hat{S}_{12} f_{12}^{(0)} - \hat{G}_{12} f_{123}^{(0)} \right]$$

Pour obtenir une forme plus explicite, nous remplaçons la fonction de distribution double f_{12} qui apparaît dans le terme collisionnel de la première équation de B.B.G.K.Y. par (2,16)

$$(2,16) \quad f_{12} = f_1 f_2 \Psi_{12} - \tau \left\{ f_1 f_2 \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial t} + f_2 (\vec{w}_1 f_1 + \frac{KT_1}{m} \frac{\partial f_1}{\partial \vec{w}_1}) \cdot \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial \vec{x}_1} \right. \\ \left. + f_1 (\vec{w}_2 f_2 + \frac{KT_1}{m} \frac{\partial f_2}{\partial \vec{w}_2}) \cdot \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial \vec{x}_2} \right\}$$

Considérons également la densité particulaire comme étant uniforme à l'intérieur de la sphère d'interaction.

On a finalement, en mettant τ en facteur devant les intégrales puisque cette quantité ne dépend ni de $\vec{x}_2$, ni de $\vec{w}_2$

$$(3,2) \quad \frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{w}_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{x}_1} + \frac{\vec{x}_1}{m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{w}_1} \\ + n_1 \frac{\partial f_1}{\partial \vec{w}_1} \cdot \int \frac{\vec{x}_{12}}{m} \left[1 - \tau \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} + \vec{v}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}_2} \right) \right] \Psi_{12} d\vec{x}_2 \\ - \tau n_1 \int \frac{\vec{x}_{12}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{w}_1} \left(\vec{v}_1 f_1 + \frac{KT_1}{m} \frac{\partial f_1}{\partial \vec{w}_1} \right) \cdot \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial \vec{x}_1} d\vec{x}_2 = 0$$

Telle est la nouvelle équation cinétique à laquelle conduit l'hypothèse F.S. Elle est formellement identique à l'équation de FOKKER-PLANCK.

III.3. - EQUATION CINETIQUE SIMPLIFIEE

Supposons que Ψ_{12} soit isotrope ; on peut alors utiliser la relation

$$(3,3) \quad \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial \vec{x}_1} + \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial \vec{x}_2} = 0$$

Compte tenu du domaine d'intégration restreint, la vitesse hydrodynamique $\vec{v}_2$ peut être considérée comme uniforme à l'intérieur de la sphère d'interaction et prise égale à $\vec{v}_1$. (Remarquons toutefois, qu'en procédant ainsi nous perdons de l'information comme nous le verrons dans les chapitres qui suivent).

Il vient alors, en supprimant l'indice 1

$$(3,4) \quad \frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{w} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{x}} + \frac{\vec{x}}{m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{w}} \\ - \tau \frac{nKT}{2m} \cdot B \left[3f_1 + (\vec{w} - \vec{v}) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{w}} + \frac{KT}{m} \Delta_w f_1 \right] = 0$$

$\Delta_w f$ étant le laplacien de f dans l'espace des vitesses et B l'intégrale définie par

$$(3,5) \quad B = - \frac{8\pi}{3KT} \int \frac{d\psi_{12}}{dr} \frac{d\psi_{12}}{dr} r^2 dr$$

Introduisons le vecteur vitesse relative $\vec{V} = \vec{w} - \vec{v}$; d'où

$$(3,6) \quad \frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{w} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{x}} + \frac{\vec{x}}{m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{w}} - \zeta \frac{nKT}{2m} B \left[3f_1 + \vec{V} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{V}} + \frac{KT}{m} \Delta_V f_1 \right] = 0$$

Telle est l'équation cinétique simplifiée. C'est en fait une équation intégrale puisqu'elle contient des grandeurs macroscopiques n_1 , $\vec{v}_1$, T définies à partir d'intégration sur f_1 [16].

Il est intéressant de signaler qu'une équation du même genre a été obtenue par RICE et ALLNATT [13] - [15]. Les deux équations diffèrent tant par le coefficient en jeu que par la méthode d'établissement. RICE et ALLNATT introduisent en effet, directement un coefficient de friction qu'ils calculent à partir de la fonction d'auto-corrélation des forces interparticulaires. Ils aboutissent ainsi à une autre expression du coefficient qui tient lieu de ζB .

On vérifie sans peine qu'à l'équilibre, soit

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial x_i} = X_i = 0$$

la distribution maxwellienne en $\exp. \left\{ - \frac{m v_1^2}{2 KT} \right\}$ est bien solution de (3,6).

Chapitre IV

LES EQUATIONS DE LA MECANIQUE DES FLUIDES DANS LE CADRE DE L'HYPOTHESE F.S.

IV.1. - POSITION DU PROBLEME

L'équation cinétique F.S. contenant des grandeurs macroscopiques, il est intéressant de la résoudre par une méthode des moments [6] et d'obtenir ainsi un jeu d'équations de la Mécanique des Fluides.

Après un bref rappel concernant l'établissement des équations de récurrence du mouvement à partir de la première équation de B.B.G.K.Y. nous porterons successivement notre attention sur l'équation cinétique F.S. générale et sur l'équation simplifiée.

Nous noterons que dans les intégrales qui vont suivre, il convient de distinguer celles qui portent sur les termes de collision et les autres. Il est inutile de détailler ces dernières, les résultats étant bien connus.

Nous allons également montrer comment cette équation cinétique conduit, à l'équilibre, à une fonction de distribution maxwellienne.

IV.2. - EQUATION DE CONSERVATION DES PARTICULES

Elle s'obtient en multipliant la première équation de B.B.G.K.Y. par $\underline{dw}$ et en intégrant dans tout l'espace des vitesses. Les termes qui contiennent une dérivée sur la vitesse donnent un résultat nul. Il vient sans difficulté, en notations condensées et en supprimant l'indice 1.

$$(4,1) \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot (n \vec{v}) = 0$$

Cette équation traduit la conservation du nombre de particules. La relation de fermeture F.S. n'apporte évidemment aucun élément nouveau.

IV.3. - EQUATION DE TRANSPORT DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT

Multiplions maintenant l'équation cinétique par $m \vec{w}$ et intégrons dans tout l'espace des vitesses.

IV.3.1. - La première équation de B.B.G.K.Y. conduit à l'équation de la conservation de la quantité de mouvement [1] [5] .

$$(4,2) \quad n m \left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \right] \vec{v} = n \vec{X} - \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{P}$$

Le tenseur de pression totale P_{kl} est la somme des tenseurs de pression cinétique p_{kl} et de pression interparticulaire π_{kl} définis par les relations

$$(4,3) \quad p_{kl} = m \int v_k v_l f \, d\vec{w} \\ - \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{\pi} = \int n_{12} \vec{X}_{12} \, d\vec{x}_2$$

c'est-à-dire en notations tensorielles

$$- \frac{\partial \pi_{ki}}{\partial x_i} = \int n_{12} X_{k,12} \, d\vec{x}_2$$

IV.3.2. - L'équation cinétique F.S. (3,2) conduit à l'équation (4,2), le terme de pression interparticulaire ayant pour expression

$$(4,4) \quad \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{\pi} = - n^2 \int \vec{X}_{12} \left[1 - \tau \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} + \vec{v}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}_2} \right) \right] \Psi_{12} \, d\vec{x}_2$$

et en général ce terme n'est pas nul.

Dans le cas d'un milieu homogène, le tenseur de pression interparticulaire est donné par

$$\pi_{kl} = - \frac{n^2}{2} \int X_{k,12} r_l \left[\Psi_{12} - \tau \left(\frac{\partial \Psi_{12}}{\partial t} + (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial \vec{r}} \right) \right] d\vec{r}$$

IV.3.3. - Reprenons maintenant l'équation F.S. simplifiée

$$(3,6) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{w} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \frac{1}{m} \vec{X} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{w}} = \tau \frac{nKT}{2m} B \left[3f + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} + \frac{KT}{m} \Delta_v f \right]$$

Le terme de collision, multiplié par $m \vec{w}$ et intégré dans l'espace des vitesses donne, en faisant usage d'intégrations par partie, une contribution nulle.

Ainsi l'équation cinétique F.S. simplifiée, comme l'équation de

BOLTZMANN ne peut être appliquée qu'aux fluides dont la pression interparticulaire est faible devant la pression cinétique.

IV.4. - EQUATION DE TRANSPORT DE LA PRESSION CINETIQUE

IV.4.1. - Multiplions la première équation de B.B.G.K.Y. par $mV_{k,1} V_{l,1}$ et intégrons dans tout l'espace des vitesses $\vec{w}_1$

Il vient

$$(4,5) \quad \int m V_{k,1} V_{l,1} \hat{S}_1 f_1 \underline{dw}_1 = J_{kl}$$

avec

$$J_{kl} = \int X_{k,12} V_{l,1} f_{12} \underline{dx}_2 \underline{dw}_1 \underline{dw}_2 + \int X_{l,12} V_{k,1} f_{12} \underline{dx}_2 \underline{dw}_1 \underline{dw}_2$$

soit en regroupant les termes

$$(4,6) \quad \frac{\partial p_{kl}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[p_{kli} + v_i p_{kl} \right] + p_{ki} \frac{\partial v_l}{\partial x_i} + p_{li} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \\ = \int X_{k,12} V_{l,1} f_{12} \underline{dx}_2 \underline{dw}_1 \underline{dw}_2 + \int X_{l,12} V_{k,1} f_{12} \underline{dx}_2 \underline{dw}_1 \underline{dw}_2$$

IV.4.2. - Dans le cadre de l'hypothèse F.S. (2,16)

$$(2,16) \quad f_{12} = f_1 f_2 \Psi_{12} - \tau \left\{ f_1 f_2 \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial t} + f_2 (\vec{w}_1 f_1 + \frac{KT}{m} \frac{\partial f_1}{\partial \vec{w}_1}) \cdot \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial \vec{x}_1} \right. \\ \left. + f_1 (\vec{w}_2 f_2 + \frac{KT}{m} \frac{\partial f_2}{\partial \vec{w}_2}) \cdot \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial \vec{x}_2} \right\}$$

Le terme J_{kl} se simplifie. En effet tous les termes de f_{12} qui ne contiennent ni la vitesse $\vec{w}_1$, ni une dérivée sur cette vitesse donnent un résultat nul. J_{kl} se met alors sous la forme

$$(4,7) \quad J_{kl} = -\tau \left[p_{jl} - n KT \delta_{jl} \right] n \int \frac{X_{k,12}}{m} \cdot \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial x_{j,1}} \underline{dx}_2 \\ - \tau \left[p_{jk} - n KT \delta_{jk} \right] n \int \frac{X_{l,12}}{m} \cdot \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial x_{j,1}} \underline{dx}_2$$

Il vient, sans difficulté, en admettant que le coefficient de corrélation Ψ_{12} est isotrope,

$$J_{kl} = -\tau \frac{n KT}{m} B \left[p_{kl} - n KT \delta_{kl} \right]$$

IV.4.3. - Enfin l'équation F.S. simplifiée conduit à la même expression

$$(4,8) \quad J_{kl} = -\tau \frac{n KT}{m} B \left[p_{kl} - n KT \delta_{kl} \right]$$

et dans le cas particulier où $k = l$, $J_{kk} = 0$.

IV.5. - INVARIANTS COLLISIONNELS

Les calculs que nous venons d'effectuer montrent que m , $m \vec{w}$, et $\frac{1}{2} m v^2$ sont des invariants collisionnels dans le formalisme de l'équation cinétique simplifiée

$$(3,6) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{w} \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \frac{1}{m} \vec{x} \frac{\partial f}{\partial \vec{w}} = \tau \frac{n KT}{2 m} B \left[3 f + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} + \frac{KT}{m} \Delta_v f \right]$$

Nous retrouverons donc une propriété classique de l'équation de BOLTZMANN.

L'équation cinétique générale met, par contre, en évidence un résultat intéressant, car elle tient compte de la pression interparticulaire, ce qui permettra de déterminer la viscosité interparticulaire.

IV.6. - THEOREME H

Considérons un fluide homogène au repos et à la température cinétique uniforme mais dont la fonction de distribution n'est pas maxwellienne. Le fluide évolue vers l'état maxwellien et cette évolution se fait avec une entropie croissante ainsi que nous allons le montrer. La quantité

$$\tau \frac{n KT}{2 m} B$$

est une fonction de la température toujours positive que nous désignerons par a^2

$$(4,9) \quad \frac{\partial f}{\partial t} - a^2 \left[\frac{\partial}{\partial w_i} \left(f w_i + \frac{KT}{m} \frac{\partial f}{\partial w_i} \right) \right] = 0$$

Définissons la fonction H par la relation ²⁾

$$(4,10) \quad H = \int f \lg f \, dw$$

2) La quantité $S = -H + \text{constante}$ est généralement appelée entropie alors qu'elle n'est que le premier terme de l'expression de l'entropie statistique comme l'a montré J. YVON [1].

Multiplions l'équation (4,9) par $\lg f$ et intégrons sur l'espace des vitesses ; il vient

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} \lg f \underline{dw} = \frac{d}{dt} \int f \lg f \underline{dw} - \frac{d}{dt} \int f \underline{dw} = \frac{dH}{dt} - \frac{dn}{dt} = \frac{dH}{dt} ,$$

$$\int \lg f \frac{\partial}{\partial w_i} \left(f w_i + \frac{KT}{m} \frac{\partial f}{\partial w_i} \right) \underline{dw} = - \int \frac{1}{f} \left(f w_i + \frac{KT}{m} \frac{\partial f}{\partial w_i} \right) \frac{\partial f}{\partial w_i} \underline{dw} ,$$

d'où la relation

$$(4,11) \quad \frac{dH}{dt} = - a^2 \int \frac{1}{f} \left(f w_i + \frac{KT}{m} \frac{\partial f}{\partial w_i} \right) \frac{\partial f}{\partial w_i} \underline{dw}.$$

Posons

$$(4,12) \quad f_1 = \exp \left[- \frac{mw^2}{2 KT} \right] g(\vec{w})$$

Il vient

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} = & - a^2 \int \frac{KT}{mg} \left[\sum_i \left(\frac{\partial g}{\partial w_i} \right)^2 \right] \exp \left[- \frac{mw^2}{2 KT} \right] \underline{dw} \\ & + a^2 \int w_i \frac{\partial g}{\partial w_i} \exp \left[- \frac{mw^2}{2 KT} \right] \underline{dw} . \end{aligned}$$

Intégrons par partie la deuxième intégrale. On constate qu'elle est nulle

$$\int w_i \frac{\partial g}{\partial w_i} \exp \left[- \frac{mw^2}{2 KT} \right] \underline{dw} = \int \left[\frac{mw^2}{KT} - 3 \right] f \underline{dw} = 0 ,$$

donc

$$(4,13) \quad \frac{dH}{dt} = - a^2 \int \frac{KT}{mg} \left[\sum_i \left(\frac{\partial g}{\partial w_i} \right)^2 \right] \exp \left[- \frac{mw^2}{2 KT} \right] \underline{dw}$$

L'intégrale est positive ou nulle puisque la fonction g ne peut être négative, donc

$$(4,14) \quad \frac{dH}{dt} \leq 0$$

H décroît donc jusqu'à l'état maxwellien caractérisé par

$$(4,15) \quad g = \left(\frac{m}{2 \pi K T} \right)^{3/2}$$

Il reste à déterminer le temps collisionnel τ , ce que nous allons entreprendre dans le chapitre VI, mais dès maintenant nous allons montrer que les équations ci-dessus conduisent à une détermination aisée des coefficients de viscosité.

Chapitre V

DETERMINATION DES COEFFICIENTS DE VISCOSITE

V.1. - POSITION DU PROBLEME

Le tenseur de pression P_{kl} d'un fluide est de la forme

$$(5,1) \quad P_{kl} = P_0 \delta_{kl} - \mu \left[\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right] + \left(\frac{2}{3} \mu - \chi \right) \delta_{kl} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \cdot \vec{v}$$

P_0 est la pression scalaire ; μ et χ sont respectivement les coefficients de viscosité de glissement (shear) et de dilatation (bulk).

Le tenseur de pression étant la somme de la pression cinétique et de la pression interparticulaire

$$P_{kl} = p_{kl} + \pi_{kl}$$

nous allons évaluer successivement les viscosités cinétiques μ_c et χ_c et les viscosités interparticulaires μ_{in} et χ_{in} .

V.2. - CALCUL DES COEFFICIENTS DE VISCOSITE CINETIQUE

Reprenons l'équation de transport de la pression cinétique

$$(4,6) \quad \frac{\partial p_{kl}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[p_{kli} + v_i p_{kl} \right] + p_{ki} \frac{\partial v_l}{\partial x_i} + p_{li} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\tau n KT}{m} B \left[p_{kl} - n KT \delta_{kl} \right] = 0$$

$$(3,5) \quad \text{avec } B = - \frac{8\pi}{3 KT} \int \frac{d\psi}{dr} \frac{d\psi}{dr} r^2 dr$$

Imaginons un écoulement stationnaire à densité uniforme n possédant en outre les caractéristiques suivantes :

Les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}$ sont des fonctions linéaires des composantes du vecteur position de façon à considérer $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ comme étant constant.

Le tenseur de pression cinétique est uniforme ; les trois composantes diagonales diffèrent peu de la pression cinétique scalaire et les composantes non diagonales sont très petites devant cette pression cinétique scalaire p . La température T est uniforme à la suite de n et p et le tenseur flux d'énergie thermique est nul.

$$(5,2) \quad \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial v_k}{\partial t} = \frac{\partial p_{kl}}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial n}{\partial x_i} = \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial p_{kl}}{\partial x_i} = 0$$

$$\text{Pour } k = l \quad p_{kl} \simeq p$$

$$\text{et } k \neq l \quad p_{kl} \ll p$$

L'équation de conservation des particules devient

$$(5,3) \quad \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{v} = 0$$

d'où pour l'équation (4,6) la forme

$$(5,4) \quad \tau_p \frac{B}{m} (p_{kl} - n KT \delta_{kl}) = - \left[p_{ki} \frac{\partial v_l}{\partial x_i} + p_{li} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right]$$

En utilisant l'approximation (5,2) on peut ne conserver au second membre que les termes diagonaux du tenseur de pression cinétique et les égaler à p .

Posons en outre

$$(5,5) \quad \mu_c = \frac{m}{\tau_B}$$

Il vient, en tenant compte du (5,3)

$$(5,6) \quad k \neq l \quad p_{kl} = - \mu_c \left[\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right]$$

$$k = l \quad p_{kk} = p - \mu_c \left[\frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{v} \right]$$

$\mu_c = \frac{m}{\tau_B}$ est le coefficient de viscosité cinétique de glissement.

Le coefficient de viscosité de dilatation χ_c est nul.

Notons que pour les gaz dilués le coefficient de corrélation binaire prend la forme

$$\Psi = e^{-\frac{\varphi}{KT}}$$

$$\text{et } B = \frac{8\pi}{3K^2T^2} \int_0^\infty \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 e^{-\frac{\varphi}{KT}} r^2 dr$$

Le calcul de μ_c ne présente alors aucune difficulté.

V.3. - CALCUL DES COEFFICIENTS DE VISCOSITE INTERPARTICULAIRE

Dans l'équation de transport de la quantité de mouvement, obtenue à partir de l'équation cinétique F.S. générale (3,2), nous avons mis en évidence le tenseur de pression interparticulaire. Dans le cas d'un gaz homogène, ce tenseur est donné par

$$(1,8) \quad \pi_{kl} = -\frac{1}{2} \int x_{k,12} r_l n_{12} dr$$

avec

$$(2,15) \quad n_{12} = n^2 \Psi_{12} - \tau n^2 \left[\frac{\partial \Psi_{12}}{\partial t} - \vec{v}_1 \cdot \frac{d}{d\vec{r}} \Psi_{12} + \vec{v}_2 \cdot \frac{d}{d\vec{r}} \Psi_{12} \right]$$

On simplifie l'expression de π_{kl} en supposant $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ constant et en

admettant que dans le domaine de la portée des forces interparticulaires la vitesse hydrodynamique varie de telle manière qu'on puisse se limiter au premier ordre

$$v_{i,2} = v_{i,1} + (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \cdot \frac{\partial v_{i,1}}{\partial \vec{x}_1}$$

Supprimons les indices 1 et 2 et posons

$$\pi_0 = -\frac{2\pi}{3} n^2 \int_0^\infty \Psi \frac{d\varphi}{dr} r^3 dr$$

il vient,

$$(5,7) \quad \begin{aligned} \pi_{kl} = & \pi_0 \delta_{kl} + \frac{\tau}{2} n^2 \int \frac{r_k r_l}{r} \frac{d\varphi}{dr} \frac{\partial \Psi}{\partial t} dr \\ & + \frac{\tau}{2} n^2 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \int \frac{r_k r_l r_i r_j}{r^2} \frac{d\varphi}{dr} \frac{\partial \Psi}{\partial t} dr \end{aligned}$$

Supposons la température stationnaire ; la fonction Ψ dépend du temps par l'intermédiaire de la densité particulaire simple. On a

$$(5,8) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial t} = - \frac{\partial \Psi}{\partial \lg n} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{v}$$

et en posant :

$$(5,9) \quad C = - \frac{4 \pi}{15 KT} \int_0^\infty \frac{d\varphi}{dr} \frac{d\Psi}{dr} r^4 dr$$

on obtient pour $k \neq 1$

$$(5,10) \quad \pi_{kl} = - \frac{\tau KT}{2} C n^2 \left[\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right]$$

pour $k = 1$

$$(5,11) \quad \pi_{kk} = \pi_0 - \tau KT C n^2 \frac{\partial v_k}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{v} \left[\frac{2 \pi}{3} \tau n^2 \int_0^\infty \frac{\partial \Psi}{\partial \lg n} \frac{d\varphi}{dr} r^3 dr + \frac{\tau KT n^2 C}{2} \right]$$

D'où l'expression des coefficients de viscosité interparticulaire

$$\mu_{in} = \frac{\tau KT C}{2} n^2$$

$$(5,12) \quad \chi_{in} = \frac{5}{3} \mu_{in} + \frac{2 \pi}{3} \tau n^2 \int_0^\infty \frac{\partial \Psi}{\partial \lg n} \frac{d\varphi}{dr} r^3 dr$$

Dans le cas particulier d'un gaz dilué, μ_{in} et χ_{in} sont nuls.

Les équations cinétiques générale (3,2) et simplifiée (3,6) conduisent aux mêmes expressions des coefficients de viscosité d'un gaz parfait. Par contre, seule l'équation générale (3,2) nous permet d'évaluer les coefficients de viscosité interparticulaire d'un gaz dense.

Chapitre VI

DETERMINATION DU TEMPS COLLISIONNEL

Nous examinons successivement la notion de temps collisionnel dans les gaz dilués et dans les fluides denses (liquides).

VI.1. - CAS DES GAZ DILUES

Après une approche semi empirique du temps collisionnel, nous portons notre attention sur les modèles physiques conduisant à la formule de Sutherland.

VI.1.1. - Approche semi empirique

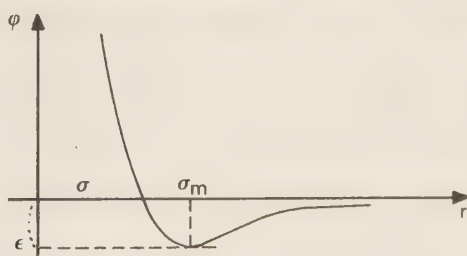


Figure 1

Le temps collisionnel est de l'ordre de la durée d'une collision. Ainsi convient-il de définir cette notion à partir des caractéristiques du potentiel d'interaction $\varphi(r)$. Nous allons examiner celles-ci.

Pour des molécules non polaires ce potentiel $\varphi(r)$ est du type

$$(6,1) \quad \varphi(r) = \varepsilon \left[\left(\frac{s}{6} \right)^{6/6-s} - \left(\frac{s}{6} \right)^{s/6-s} \right]^{-1} \cdot \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^s - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right]$$

ε est une quantité homogène à une énergie, σ une quantité homogène à une longueur et s un entier supérieur à 10.

On voit sur la figure 1 que ce potentiel nul à l'infini décroît de l'infini à une valeur σ_m selon une loi voisine d'une loi en r^{-6} traduisant un effet de dipôle induit. La force correspondante est attractive.

Par contre, de l'origine à σ_m , le potentiel correspond à une force répulsive dont l'effet devient très intense pour $r < \sigma$. ϵ est la valeur absolue du minimum de potentiel.

L'abscisse du minimum est σ_m avec

$$(6,2) \quad \sigma_m = \sigma \left(\frac{s}{6} \right)^{1/s-6}$$

Désignons par $m_r = \frac{m}{2}$ la masse réduite et par g la vitesse réduite du système de deux particules en interaction et considérons une particule de masse m_r soumise à un tel potentiel et provenant de l'infini avec un vecteur vitesse g dirigée vers un centre de forces fixe dont émane ce potentiel. La vitesse de cette particule s'accroît de l'infini à σ_m puis un freinage intense annule sa vitesse à une distance légèrement inférieure à σ soit σ_a pour laquelle l'énergie potentielle est égale à $\frac{1}{2} m_r g^2$.

Une approximation assez convenable de la durée d'une collision est σ/g soit pour un ensemble de particules à la température T la quantité

$$\left(\frac{m}{6 KT} \right)^{1/2} \sigma$$

Nous posons par définition que le temps collisionnel τ correspond non à cette durée de collision mais à la durée de la phase de ralentissement qui représente l'élément intense du choc. Cette phase est une fonction décroissante de s et nous prenons comme première approximation

$$\frac{\sigma}{gs} \text{ c'est-à-dire } \frac{\sigma}{s} \left(\frac{m}{6 KT} \right)^{1/2}$$

Cependant, une telle formule n'est pas assez fine et ne rend pas suffisamment compte du fait que cette phase de ralentissement diminue de durée lorsque la quantité ϵ croît (freinage plus efficace), et augmente avec T (vitesse initiale plus élevée), pour des valeurs données de σ et s . Finalement nous proposons la formule approchée,

$$(6,3) \quad \tau = \alpha \frac{\sigma}{s} \left(\frac{m}{6 KT} \right)^{1/2} \exp \left[- \frac{\epsilon}{KT} \right]$$

En introduisant la température interaction $T_i = \frac{\epsilon}{K}$, il vient

$$\tau = \alpha \frac{\sigma}{s} \left(\frac{m}{6 KT} \right)^{1/2} \exp \left[- \frac{T_i}{T} \right]$$

α désignant un coefficient voisin de l'unité.

La confrontation avec l'expérience montrera l'intérêt de cette expression du temps collisionnel.

A l'appui de cette formule nous pouvons donner l'argument suivant :

Considérons l'expression du temps collisionnel à la vitesse g

$$\tau(g) = \frac{\alpha}{s} \left(\frac{\pi}{6} \right)^{1/2} \frac{\sigma}{g}$$

Le facteur $\left(\frac{\pi}{6} \right)^{1/2}$ intervenant pour simplifier les calculs.

Evaluons τ en prenant la valeur moyenne de $\tau(g)$ pondérée par une répartition maxwellienne des vitesses g et introduisons une vitesse de coupure g_c pour exclure les durées de passage trop longues dans la zone répulsive correspondant aux particules les plus lentes de la distribution.

Il vient,

$$\tau = \frac{\alpha}{s} \left(\frac{\pi}{6} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{4\pi KT} \right)^{3/2} 4\pi\sigma \int_{g_c}^{\infty} e^{-\frac{mg^2}{4KT}} g dg$$

Posons
$$g_c = \left(\frac{4\gamma KT_i}{m} \right)^{1/2}$$

d'où

$$(6,4) \quad \tau = \alpha \frac{\sigma}{s} \left(\frac{m}{6KT} \right)^{1/2} e^{-\gamma \frac{T_i}{T}}$$

La formule (6,3) est donc un cas particulier de (6,4). Le coefficient γ est à déterminer expérimentalement.

En réalité la particule aborde la zone répulsive avec la vitesse

$$\left(g^2 + \frac{4KT_i}{m} \right)^{1/2} \quad g \text{ étant la vitesse à grande distance.}$$

Pour des valeurs assez faibles de T_i , on peut négliger le terme $\frac{4KT_i}{m}$.

La formule (6,4) est donc valable pour les températures d'interaction faibles devant T , ce qui est généralement le cas.

Pour les températures d'interaction T_i élevées, on prendra pour $\tau(g)$ l'expression suivante :

$$\tau(g) = \frac{\alpha}{s} \left(\frac{\pi}{6} \right)^{1/2} \frac{\sigma}{\left(g^2 + \frac{4KT_i}{m} \right)^{1/2}}$$

d'où

$$(6,5) \quad \tau = \frac{\alpha}{s} \left(\frac{\pi}{6} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{4 \pi K T} \right)^{3/2} 4 \pi \sigma \int_{g'_c}^{\infty} e^{-\frac{m g^2}{4 K T}} \frac{g^2}{\left(g^2 + \frac{4 K T_i}{m} \right)^{1/2}} dg$$

avec

$$g'_c = \left(4 \gamma' \frac{K T_i}{m} \right)^{1/2}$$

Les formules (6,3), (6,4) et (6,5) conduisent à un accord satisfaisant entre les valeurs expérimentales et théoriques de la viscosité des gaz dilués (chapitre VII).

VI.1.2. - Modèles physiques

Nous présentons dans ce paragraphe deux modèles physiques conduisant à une expression de la viscosité du type "formule de Sutherland" et ceci en tenant compte du fait que le temps collisionnel correspond à "la durée de ralentissement" dans la zone répulsive du potentiel d'interaction.

En matière de viscosité des gaz dilués, la formule classique est celle de Sutherland.

$$(6,6) \quad \mu_c = \frac{A}{1 + \frac{\theta}{T}} \cdot T^{1/2}$$

T est la température
A et θ sont des constantes,

et la méthode proposée dans les chapitres précédents conduit à l'expression

$$(5,5) \quad \mu_c = \frac{m}{\tau_B}$$

B étant l'intégrale d'interaction

$$B = \frac{8 \pi}{3} \frac{1}{(K T)^2} \int_0^{\infty} \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 e^{-\frac{\varphi}{K T}} r^2 dr$$

a) - Modèle linéaire

Substituons au potentiel φ un potentiel φ_1 confondu avec φ pour la partie attractive et linéaire avec une pente élevée pour la partie répulsive.

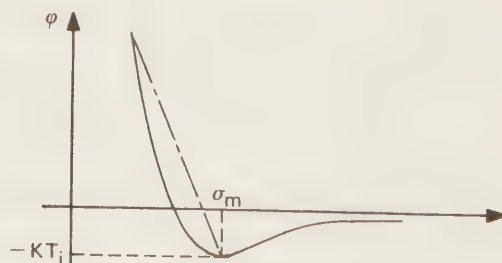


Figure 2

$$(6,7) \quad \text{Pour } r \leq \sigma_m \quad \varphi_1 = -E_0 \left(\frac{r}{\sigma_m} - 1 \right) - KT_i$$

$$r \geq \sigma_m \quad \varphi_1 = \varphi$$

E_0 désigne une énergie très grande devant KT et KT_i .

Il vient, en posant $\frac{r}{\sigma_m} = u$

$$B = \frac{8\pi}{3} \sigma_m \cdot \left[\left(\frac{E_0}{KT} \right)^2 e^{-\frac{1}{KT} (E_0 - KT_i)} \int_0^1 e^{\frac{E_0}{KT} u} u^2 du + \frac{1}{(KT)^2} \int_1^\infty \left(\frac{d\varphi}{du} \right)^2 e^{-\frac{\varphi}{KT}} u^2 du \right]$$

d'où

$$B = \frac{8\pi}{3} \sigma_m \left\{ \frac{KT}{E_0} e^{-\frac{1}{KT} (E_0 - KT_i)} \left[e^{\frac{E_0}{KT}} \left(\frac{E_0^2}{(KT)^2} - \frac{2E_0}{KT} + 2 \right) - 2 \right] \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(KT)^2} \int_1^\infty \left(\frac{d\varphi}{du} \right)^2 e^{-\frac{\varphi}{KT}} u^2 du \right\}$$

E_0 étant une quantité très grande devant KT et KT_i , on a

$$(6,8) \quad B \simeq \frac{8\pi}{3} \sigma_m \frac{E_0}{KT} e^{\frac{KT_i}{T}}$$

Ecrivons que τ est la durée de passage dans la zone répulsive de la particule fictive de masse réduite $\frac{m}{2}$ décrivant le mouvement relatif.

La force étant constante dans cette zone répulsive, il vient pour une particule qui arrive au fond du puits avec une vitesse v

$$(6,9) \quad \tau_v = 2 \left[\frac{v}{\left(\frac{E_0}{\frac{m \sigma_m}{2}} \right)} \right] = \frac{m \sigma_m v}{E_0}$$

Nous constatons dès maintenant que E_0 ne figure pas dans le produit τB .

Si g désigne la vitesse de la particule à grande distance c'est-à-dire en dehors de la zone d'interaction, on a

$$\frac{m}{4} v^2 = \frac{m}{4} g^2 + KT_i$$

d'où en prenant la moyenne sur une fonction de distribution maxwellienne des particules de masse $\frac{m}{2}$ à la température T et en affectant le résultat d'un coefficient α pour tenir compte du fait que les collisions ne sont pas toutes à paramètre d'impact nul.

$$\zeta = \alpha \frac{m \sigma_m}{E_0} \left(\frac{m}{4 \pi K T} \right)^{3/2} \int_0^\infty \left[g^2 + \frac{4 K T_i}{m} \right]^{1/2} e^{-\frac{m g^2}{4 K T}} 4 \pi g^2 dg$$

$$(6,10) \quad \zeta = \frac{8 \alpha \sigma_m}{E_0} \left(\frac{m K T}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^\infty \left[\lambda^2 + \frac{T_i}{T} \right]^{1/2} e^{-\lambda^2} \lambda^2 d\lambda$$

en posant $\lambda = \left(\frac{m}{4 K T} \right)^{1/2} g$

Il en résulte compte tenu de (6,8) et (6,10)

$$(6,11) \quad \mu_c = \frac{3}{64 \alpha \sigma_m^2} \left(\frac{m K T}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{e^{\frac{T_i}{T}} \int_0^\infty \left(\lambda^2 + \frac{T_i}{T} \right)^{1/2} e^{-\lambda^2} \lambda^2 d\lambda}$$

Les valeurs théoriques du coefficient de viscosité obtenues à l'aide de cette expression seront présentées dans le chapitre qui suit.

Pour $\frac{T_i}{T}$ petit, on peut négliger $\frac{T_i}{T}$ devant λ^2 dans l'intégrale et développer e $\frac{T_i}{T}$ d'où :

$$(6,12) \quad \mu_c \approx \frac{3}{32 \alpha \sigma_m^2} \left(\frac{m K T}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{1 + \frac{T_i}{T}}$$

On retrouve la formule de Sutherland.

La valeur de α ajustée à l'aide de la formule de la viscosité des gaz de sphères dures ($T_i = 0$) donnée par Hirschfelder,

$$(6,13) \quad \mu_c = \frac{5}{16} \left(\frac{m K T}{\pi} \right)^{1/2} \cdot \frac{1}{\sigma_m^2}$$

est $\alpha = \frac{3}{10} = 0,3.$

b) - Modèle parabolique

Nous substituons au potentiel φ un potentiel φ_2 confondu avec φ pour la partie attractive et parabolique pour la partie répulsive.

$$(6,14) \quad \begin{array}{ll} \text{Pour } r \leq \sigma_m & \varphi_2 = -K T_i + \frac{1}{4} m \omega^2 (r - \sigma_m)^2 \\ \text{Pour } r \geq \sigma_m & \varphi_2 = \varphi \end{array}$$

Dans les paragraphes qui suivent nous n'évaluons pas τ . Nous supposons simplement que la fréquence angulaire classique ω est inversement proportionnelle à τ .

$$(6,15) \quad \tau \omega = \text{constante.}$$

Calcul de τ_B

Ecrivons τ_B

$$(6,16) \quad \tau_B = \tau \frac{8\pi}{3} \cdot \left\{ \int_0^{\sigma_m} \left(\frac{d \frac{\varphi_2}{KT}}{dr} \right)^2 e^{-\frac{\varphi_2}{KT}} r^2 dr + \int_{\sigma_m}^{+\infty} \left(\frac{d \frac{\varphi}{KT}}{dr} \right)^2 e^{-\frac{\varphi}{KT}} r^2 dr \right\}$$

Posons $u = \omega (r - \sigma_m)$

$$(6,17) \quad \begin{aligned} \tau_B = & \frac{8\pi}{3} e^{\frac{T_i}{T}} (\tau \omega) \left(\frac{m}{2KT} \right)^2 \int_{-\omega \sigma_m}^0 u^2 \left(\sigma + \frac{u}{\omega} \right)^2 e^{-\frac{m u^2}{4KT}} du \\ & + \tau \frac{8\pi}{3} \int_{\sigma_m}^{+\infty} \left(\frac{d \frac{\varphi}{KT}}{dr} \right)^2 e^{-\frac{\varphi}{KT}} r^2 dr \end{aligned}$$

soit en faisant tendre ω vers l'infini et τ vers zéro

$$(6,18) \quad \tau_B \approx \frac{8\pi}{3} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{2KT} \right)^{1/2} \sigma_m^2 (\omega \tau) e^{\frac{T_i}{T}}$$

On obtient finalement l'expression de la viscosité cinétique

$$(6,19) \quad \mu_c = \frac{3}{4\pi^{3/2}} \frac{(mKT)^{1/2}}{\sigma_m^2} \frac{1}{(\omega \tau)} e^{-\frac{T_i}{T}}$$

et pour $\frac{T_i}{T} < 1$, il vient la formule de Sutherland

$$(6,20) \quad \mu_c = \frac{3}{4\pi^{3/2}} \frac{(mKT)^{1/2}}{\sigma_m^2} \frac{1}{(\omega \tau)} \frac{1}{1 + \frac{T_i}{T}}$$

La valeur de $(\omega \tau)$ ajustée au moyen de la formule donnée par Hirschelder

$$(6,13) \quad \mu_c = \frac{5}{16} \left(\frac{mKT}{\pi} \right)^{1/2} \cdot \frac{1}{\sigma_m^2} \quad \text{pour } T_i = 0 \text{ (sphères dures)}$$

$$\text{est} \quad (\omega \tau) = \frac{12}{5\pi}$$

VI.2. - CAS DES LIQUIDES

Les calculs des coefficients de viscosité des liquides effectués à l'aide du temps collisionnel défini précédemment conduisent à des résultats aberrants. Nous pensons que la cause profonde de ce désaccord entre résultats théoriques et expérimentaux réside essentiellement dans le fait que dans le cas des liquides la description des phénomènes physiques se situe dans le domaine de la Mécanique Quantique.

Toutefois, nous nous proposons, à l'aide d'une théorie semi-quantique, d'évaluer les produits τ_B et τ_C . Nous conservons les expressions classiques de B et de C, mais nous proposons une approche quantique pour l'évaluation de τ .

En vue de la détermination du temps collisionnel, on peut imaginer que dans un liquide, une molécule est repoussée par deux potentiels semi-paraboliques dont la définition figure dans le paragraphe VI.1.2. (formule 6,14) c'est-à-dire que chaque molécule se déplace dans un potentiel voisin d'un puits parabolique de la forme

$$\varphi = -KT_i + \frac{1}{4} m \Omega^2 (r - \langle r \rangle)^2$$

$\langle r \rangle$ étant la position moyenne de la molécule.

Nous savons que pour l'oscillateur harmonique, les niveaux d'énergie sont exprimés en termes de $h\Omega$ c'est-à-dire en termes de $\frac{h}{\tau}$, compte tenu de l'hypothèse

$$(6,15) \quad \Omega \tau = \text{constante}$$

h étant la constante de Planck.

Ainsi pour un ensemble de molécules à la température T , nous proposons la formule approchée du temps collisionnel

$$(6,21) \quad \tau = \beta \frac{h}{KT}$$

β étant une constante déterminée expérimentalement.

La confrontation avec l'expérience montrera l'intérêt de cette formule.

VI.3. - CAS DES GAZ MODEREMENT DENSES

Les paragraphes précédents traitent deux cas limites du temps collisionnel. Le problème de la détermination du temps collisionnel d'un gaz modérément dense n'a pas été abordé d'une façon très générale.

Toutefois, cette lacune ne met pas en défaut la validité de la théorie.

Pour évaluer le temps collisionnel d'un gaz modérément dense, on doit tenir compte non seulement des collisions binaires mais aussi des collisions ternaires, quaternaires... Ceci suggère d'utiliser pour τ une formule du type

$$(6,22) \quad \tau = \tau_0 H(n\sigma^3) \quad \text{avec } H(0) = 1$$

τ_0 étant le temps collisionnel du gaz dilué.

La confrontation avec l'expérience montrera l'intérêt de cette formule. On constate en effet que pour l'argon, le néon et l'azote, le rapport $\frac{\tau}{\tau_0}$ est une fonction linéaire décroissante de $n\sigma^3$ et cette fonction est la même pour les trois gaz.

Chapitre VII

COMPARAISON AVEC L'EXPERIENCE

VII.1. - EXPRESSION FINALE DES COEFFICIENTS DE VISCOSITE

Rappelons les résultats obtenus :

$$(7,1) \quad \begin{aligned} \mu_c &= \frac{m}{\tau_B} & \mu_{in} &= \tau \frac{KT C}{2} n^2 \\ x_c &= 0 & x_{in} &= \frac{5}{3} \mu_{in} + \frac{2\pi}{3} \tau n^2 \int_0^\infty \frac{\partial \Psi}{\partial \lg n} \frac{d\varphi}{dr} r^3 dr \end{aligned}$$

avec

$$B = - \frac{8\pi}{3KT} \int_0^\infty \frac{d\Psi}{dr} \frac{d\varphi}{dr} r^2 dr$$

$$C = - \frac{4\pi}{15KT} \int_0^\infty \frac{d\Psi}{dr} \frac{d\varphi}{dr} r^4 dr$$

Cas des gaz dilués

Faisons tendre n vers 0 dans les relations (7,1), il vient

$$(7,2) \quad \begin{aligned} \mu_c &= \frac{m}{\tau_B} & \mu_{in} &= 0 \\ x_c &= 0 & x_{in} &= 0 \end{aligned}$$

Le coefficient de corrélation binaire prend la forme

$$\Psi = e^{-\frac{\varphi}{KT}}$$

et

$$B = \frac{8\pi}{3(KT)^2} \int_0^\infty \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 e^{-\frac{\varphi}{KT}} r^2 dr$$

Nous comparons les valeurs expérimentales de la viscosité μ_c aux

résultats théoriques obtenus à l'aide de la formule (7,1) en prenant pour τ l'expression approchée

$$(6,4) \quad \tau = \alpha \frac{\sigma}{s} \left(\frac{m}{6 KT} \right)^{1/2} \exp - \frac{\gamma T_i}{T}$$

et l'expression plus générale

$$(6,5) \quad \tau = \alpha \frac{\sigma}{s} \left(\frac{\pi}{6} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{4 \pi KT} \right)^{3/2} 4 \pi \int_{g'_c}^{\infty} e^{-\frac{mg^2}{4 KT}} \frac{g^2}{\left(g^2 + \frac{4 KT_i}{m} \right)^{1/2}} dg$$

$$\text{avec } g'_c = \left(4 \gamma' \frac{KT_i}{m} \right)^{1/2}$$

Par ailleurs le modèle linéaire conduit à une expression intéressante de la viscosité (6,11) ; les valeurs théoriques correspondantes sont également tabulées.

Cas des liquides

Pour les liquides, la pression interparticulaire étant prédominante, on a :

$$\mu_{in} > \mu_c$$

En vue de la détermination des ordres de grandeur des viscosités μ_{in} et μ_c considérons le produit

$$\mu_{in} \mu_c = \frac{m KT n^2}{2} \frac{C}{B}$$

$$\text{et posons} \quad x = \frac{r}{\sigma}$$

σ étant la distance des particules pour laquelle le potentiel φ est nul, d'où :

$$\mu_{in} \cdot \mu_c = \frac{1}{20} m KT \sigma^2 n^2 \cdot \frac{\int_0^{\infty} \frac{d\Psi}{dx} \frac{d\varphi}{dx} x^4 dx}{\int_0^{\infty} \frac{d\Psi}{dx} \frac{d\varphi}{dx} x^2 dx}$$

Les contributions importantes aux deux intégrales provenant des valeurs de x voisines de 1, on écrit avec une bonne approximation [46]

$$(7,3) \quad \int_0^{\infty} \frac{d\Psi}{dx} \frac{d\varphi}{dx} x^4 dx \simeq \int_0^{\infty} \frac{d\Psi}{dx} \frac{d\varphi}{dx} x^2 dx$$

d'où

$$(7,4) \quad \mu_{in} \mu_c \simeq \frac{1}{20} m K T \sigma^2 n^2$$

Considérons la valeur expérimentale du coefficient de viscosité que nous écrivons :

$$(7,4 \text{ bis}) \quad \mu = \mu_{in} + \mu_c$$

Si, après évaluation de μ_{in} et μ_c à partir de (7,4) et (7,4 bis), μ_{in} prédomine

$$\mu_{in} \gg \mu_c$$

nous prenons pour l'expression théorique

$$\mu \simeq \mu_{in} = \tau \frac{K T C}{2} n^2$$

En première approximation le coefficient de corrélation Ψ est de la forme

$$\Psi = e^{-\frac{\varphi}{K T}}$$

il en résulte

$$C = \frac{4 \pi}{15} \cdot \frac{1}{(K T)^2} \int_0^\infty \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 e^{-\frac{\varphi}{K T}} r^4 dr$$

et

$$\int_0^\infty \frac{\partial \Psi}{\partial \lg n} \frac{d\varphi}{dr} r^3 dr = 0$$

D'où l'expression simplifiée des coefficients de viscosité μ et χ

$$(7,5) \quad \mu \simeq \mu_{in} = \frac{2 \pi}{15} \frac{\tau n^2}{K T} \int_0^\infty \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 e^{-\frac{\varphi}{K T}} r^4 dr$$

$$\chi = \chi_{in} = \frac{5}{3} \mu_{in}$$

avec pour expression du temps collisionnel

$$(6,21) \quad \tau = \beta \frac{h}{K T}$$

Cas des gaz modérément denses

Dans l'évaluation du coefficient de viscosité de déviation μ d'un gaz modérément dense, nous tenons compte des contributions cinétique et interparticulaire.

$$\mu = \frac{m}{\tau_B} + \tau \frac{KT C n^2}{2}$$

avec

$$(7,1) \quad B = - \frac{8 \pi}{3 KT} \int_0^\infty \frac{d\Psi}{dr} \frac{d\Psi}{dr} r^2 dr$$

$$C = - \frac{4 \pi}{15 KT} \int_0^\infty \frac{d\Psi}{dr} \frac{d\Psi}{dr} r^4 dr$$

Les contributions importantes aux deux intégrales qui figurent dans B et C provenant des valeurs voisines de $r = \sigma$, on écrit avec une bonne approximation

$$C = \frac{1}{10} B \sigma^2$$

d'où la nouvelle expression de μ

$$(7,1 \text{ bis}) \quad \mu = \frac{m}{\tau_B} + \frac{1}{20} KT n^2 \sigma^2 \tau_B$$

Désignons respectivement par τ_0 et μ_0 le temps collisionnel et le coefficient de viscosité lorsque n tend vers zéro (gaz dilué)

$$\mu_0 = \frac{m}{\tau_0 B_0}$$

B_0 étant l'intégrale

$$B_0 = \frac{8 \pi}{3 (KT)^2} \int_0^\infty \left(\frac{d\Psi}{dr} \right)^2 e^{-\frac{\Psi}{KT}} r^2 dr$$

il vient,

$$(7,1 \text{ ter}) \quad \mu = \mu_0 \frac{\tau_0}{\tau} \frac{B_0}{B} + \frac{m KT}{20} \frac{n^2 \sigma^2}{\mu_0} \frac{B}{B_0} \frac{\tau}{\tau_0}$$

- Le rapport $\frac{\tau}{\tau_0}$ est donné par (6,22) que nous mettons sous la forme

$$(6,22 \text{ bis}) \quad \frac{\tau}{\tau_0} = 1 - \lambda_1 (n \sigma^3)$$

- Par ailleurs, en première approximation, $\frac{B}{B_0}$ est donné par la relation

$$(7,6) \quad \frac{B}{B_0} = e^{+\frac{5}{12} \pi n \sigma^3 (1 - \lambda_2 \frac{T_i}{T})}$$

En effet, pour un gaz de sphères dures ($T_i = 0$), $\frac{B}{B_0}$ est donné par le coefficient de corrélation Ψ

$$\frac{B}{B_0} = \Psi(1) = 1 + \frac{5}{12} \pi n \sigma^3 + \dots$$

Le coefficient $1 - \lambda_2 \frac{T_i}{T}$ traduit l'écart du gaz considéré au gaz de sphères dures.

VII.2. - COMPARAISON AVEC L'EXPERIENCE - CAS DES GAZ DILUES

Pour examiner la validité de la théorie nous avons choisi des gaz pour lesquels un potentiel interparticulaire du type Lennard Jones, c'est-à-dire de la forme (6,1) avec $s = 12$, est acceptable

$$(7,7) \quad \varphi(r) = 4 \varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right]$$

Les valeurs de ε et σ choisies sont celles qui sont recommandées par HIRSCHFELDER [7] pour les calculs du second coefficient du viriel A, par exemple pour l'argon.

$$\frac{\varepsilon}{K} = T_i = 119,8^\circ K \quad \sigma = 3,405 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Dans le paragraphe qui suit, nous montrons que ces valeurs donnent entière satisfaction.

VII.2.1. - Calcul du second coefficient du viriel

Nous avons calculé le rapport entre les valeurs du second coefficient du viriel à la température T et à la température de référence 273,15°K. Désignons ce rapport par $a(T)$.

$$(7,8) \quad a(T) = \frac{A(T)}{A(273,15)}$$

avec

$$(7,9) \quad A(T) = - \frac{2\pi}{3} \frac{N}{KT} \int_0^\infty r^3 \frac{d\varphi}{dr} \exp \left\{ - \frac{\varphi}{KT} \right\} dr$$

N étant le nombre d'Avogadro

Les tables publiées par HILSENATH [8] et ses collaborateurs nous fournissent la valeur expérimentale de $A(T)$.

- On trouvera dans le tableau 1 les valeurs expérimentales de $A(T)$ pour l'argon avec indication de la méthode adoptée pour l'expérience.

- Le tableau 2 compare les valeurs expérimentales de $a(T)$ déduites du tableau 1 et les valeurs théoriques obtenues à l'aide de la formule (7,8).

Nous constatons que l'accord est satisfaisant.

Tableau 1

Valeurs expérimentales du second coefficient du viriel A(T) en cm³ (argon)

T (°K)	a	b	c	d	e	f	g	h
80						-227,89	-278,7	
90						-179,31	-217,4	
100						-150,66	-178,6	
110						-130,96	-150,9	
125						-109,02	-120,7	
150						- 82,38	- 85,51	
151,92	- 82,52							
152,89	- 82,14							
153,93	- 81,17							
156,51	- 79,00							
157,27	- 79,25							
159,33	- 75,67							
163,25	- 72,22							
170,62	- 65,07							
173,16		- 64,32						
186,07	- 53,83							
200,00						- 48,35	- 44,55	
215,43	- 37,02							
223,16		- 37,79						
250,00						- 28,21	- 23,06	
273,16	- 16,55	- 22,08		- 21,45	- 21,12			- 22,6
293,55	- 12,54							
298,16			- 16,34	- 15,75	- 15,48			
323,16		- 11,02	- 11,48	- 11,24	- 11,05			
348,16			- 7,49	- 7,25	- 7,14			
373,16		- 4,29	- 4,10	- 4,00	- 3,89			- 4,9
398,16			- 72	- 1,18	- 1,08			
423,16		+ 1,16	+ 2,18	+ 1,38	+ 1,42			
447,16			3,71					
473,16		4,67						
573,16		11,22						
673,16		15,29						

- (a) KAMERLINGH, ONNEX et CROMMELIN : à partir de mesures sur la pression p le volume V et la température T.
- (b) HOLBORN et SCHULTZE, et HOLBORN et OTTO : à partir de mesures sur la pression p le volume V et la température T.
- (c) TANNER et MASSON : à partir de mesures sur la pression p le volume V

- (d) MICHELS et al. : à partir de mesures sur la pression p le volume V et la température T.
- (e) MICHELS et al. : à partir de mesures sur la pression p le volume V et la température T.
- (f) VAN ITTERBECK et VAN PAERMEL : à partir de mesures de vitesse du son.
- (g) VAN ITTERBECK et VAN PAERMEL : à partir de mesures de vitesse du son.

Tableau 2

Comparaison entre les valeurs théoriques et expérimentales de $a_1(T)$ (argon)

T température °K	a_1 valeur théorique	a_1 valeur expériment.	Méthode de mesure
100	8,08	7,9	a,b
125	5,48	5,34	a,b
150	3,95	3,78	a,b
173,16	3,02	2,91	c
228,16	1,74	1,71	c
298,16	0,735	0,733	d
323,16	0,518	0,523	d
348,16	0,335	0,338	d
373,16	0,181	0,184	d
423,16	- 0,0663	- 0,067	d
473,16	- 0,254	- 0,211	c
573,16	- 0,520	- 0,508	c
673,16	- 0,696	- 0,692	c

- (a) VAN ITTERBECK et VAN PAERMEL : à partir de mesures de vitesse du son.
- (b) HOLBORN et SCHULTZE, et HOLBORN et OTTO : à partir de mesures sur la pression p le volume V et la température T.
- (c) HOLBORN, SCHULTZE, et HOLBORN, OTTO : à partir de mesures sur la pression p le volume V et la température T.
- (d) MICHELS et al. : à partir de mesures sur la pression p le volume V et la température T.

VII.2.2. - Valeurs théoriques de la viscosité obtenues à l'aide de formule approchée du temps collisionnel :

$$(6,3) \quad \tau = \alpha \frac{\sigma}{s} \left(\frac{m}{6 KT} \right)^{1/2} \exp \left\{ - \frac{T_i}{T} \right\}$$

Afin d'éliminer le coefficient α nous avons calculé le rapport entre les valeurs du coefficient de viscosité aux températures T et $T_0 = 273,15$.

Nous avons désigné ce rapport par :

$$(7,10) \quad b(T) = \frac{\mu_c(T)}{\mu_c(273,15)}$$

Les tableaux 3 et 4 comparent les valeurs expérimentales de $b(T)$ données par HILSENATH [8], HIRSCHFELDER [7] et TRAUTZ [47] aux valeurs de $b(T)$ données par la formule (7,10).

Les calculs sont effectués dans le cas :

de l'argon ($T_i = 119,8^\circ\text{K}$, $\sigma = 3,405 \cdot 10^{-10} \text{ m}$)

et de l'azote ($T_i = 95,05^\circ\text{K}$, $\sigma = 3,698 \cdot 10^{-10} \text{ m}$).

Les valeurs de T_i et σ sont celles recommandées par HIRSCHFELDER pour les calculs du second coefficient du viriel.

Nous constatons (tableaux 3-4 et figure 3) que l'accord est satisfaisant. D'autre part, les valeurs de α donnant le coefficient de viscosité théorique à $273,15^\circ\text{K}$ coïncidant avec les valeurs expérimentales sont :

$\alpha = 1,23$ (argon) et $\alpha = 1,17$ (azote).

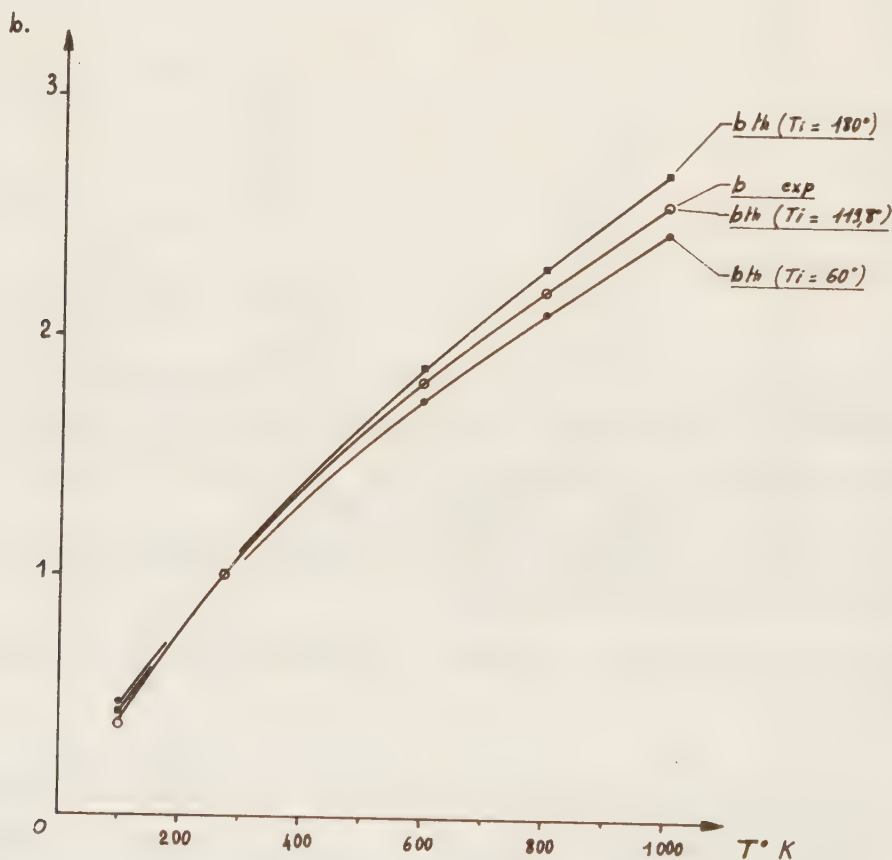


Figure 3

Rapport b pour différentes valeurs de T_i (argon)

Tableau 3

Comparaison entre les valeurs théoriques et expérimentales de $b_1(T)$ (argon)

T température °K	b_1 valeurs théoriques	b_1 valeurs expérimentales
100	0,43	0,39
200	0,78	0,765
300	1,075	1,079
400	1,335	1,349
500	1,573	1,588
600	1,794	1,806
700	2,001	2,008
800	2,198	2,198
900	2,386	2,379
1 000	2,566	2,551

N.B. : La pression choisie pour les mesures est la pression atmosphérique.

Tableau 4

Comparaison entre les valeurs théoriques et expérimentales de $b_1(T)$ (azote)

T température °K	b_1 valeurs théoriques	b_1 valeurs expérimentales
100	0,44	0,41
200	0,786	0,779
300	1,072	1,074
400	1,325	1,323
500	1,556	1,546
600	1,770	1,752
700	1,971	1,932
800	2,161	2,099
900	2,343	2,257
1 000	2,517	2,406

N.B. : La pression choisie pour les mesures est la pression atmosphérique.

VII.2.3. - Autres valeurs théoriques :

La valeur approchée du temps collisionnel

$$(6,3) \quad \tau = \alpha \frac{\sigma}{s} \left(\frac{m}{6 KT} \right)^{1/2} \exp \left\{ - \frac{T_i}{T} \right\}$$

donne satisfaction. Toutefois les corrections apportées à cette formule par (6,4)

et (6,5) nous permettent encore d'améliorer la précision

$$(6,4) \quad \tau = \alpha \frac{\sigma}{s} \left(\frac{m}{6 KT} \right)^{1/2} \exp \left\{ - \gamma \frac{T_i}{T} \right\}$$

$$(6,5) \quad \tau = \alpha \frac{\sigma}{s} \left(\frac{\pi}{6} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{4 \pi KT} \right)^{3/2} 4 \pi \int_{g'_c}^{\infty} e^{-\frac{mg^2}{4KT}} \frac{g^2}{\left(g^2 + \frac{4 KT_i}{m} \right)^{1/2}} dg$$

avec, $g'_c = \left(4 \gamma' \frac{KT_i}{m} \right)^{1/2}$

Les résultats théoriques obtenus figurent dans les tableaux 5 et 6.

Les valeurs de γ et γ' optimisées valent respectivement 0,9 et 0,74 et dans le tableau 7 nous donnons les différentes valeurs d' α .

Ces résultats confirment l'accord très satisfaisant entre l'expérience et la théorie.

Tableau 5

Comparaison des valeurs théoriques et expérimentales du coefficient de viscosité cinétique (en Décapoise) ($\gamma = 0,9$)

ARGON $T_i = 119,8^\circ K$			
T/T_i	T °K	$\mu_{exp} \cdot 10^{+5}$	$\mu_{th} \cdot 10^{+5}$
1	199,8	0,99	1,006
2	239,6	1,87	1,886
3	359,4	2,63	2,620
4	479,2	3,28	3,269
5	599	3,83	3,860
6	718,8	4,32	4,407
7	838,6	4,77	4,921
8	958,4	5,17	5,408
9	1078,2	5,56	5,872
10	1198	5,94	6,316
OXYGENE $T_i = 117,5^\circ K$			
1	117,5	0,89	0,904
2	235	1,69	1,694
3	352,5	2,37	2,354
4	470	2,96	2,936
5	587,5	3,43	3,467
6	705	3,82	3,959
7	822,5	4,18	4,420
8	940	4,55	4,857
9	1057,5	4,89	5,274
10	1175	5,22	5,673

Tableau 5 (suite)

AZOTE $T_i = 95,05^{\circ}\text{K}$			
T/T_i	$T^{\circ}\text{K}$	$\mu_{\text{exp}} \cdot 10^{+5}$	$\mu_{\text{th}} \cdot 10^{+5}$
1	95,05	0,66	0,659
2	190,1	1,24	1,235
3	285,15	1,72	1,716
4	380,2	2,13	2,141
5	475,25	2,50	2,528
6	570,3	2,82	2,888
7	665,35	3,10	3,223
8	760,4	3,38	3,542
9	855,45	3,65	3,846
10	950,5	3,89	4,137
NEON $T_i = 35,6^{\circ}\text{K}$			
1	35,6	0,59	0,569
2	71,2	1,08	1,067
3	106,8	1,50	1,482
4	142,4	1,87	1,849
5	178	2,18	2,183
6	213,6	2,49	2,493
7	249,2	2,77	2,784
8	284,8	3,06	3,059
9	320,4	3,32	3,321
10	356	3,57	3,573
HYDROGENE $T_i = 37^{\circ}\text{K}$			
1	37	0,16	0,164
2	74	0,33	0,307
3	111	0,44	0,427
4	148	0,54	0,532
5	185	0,63	0,629
6	222	0,72	0,718
7	259	0,80	0,802
8	296	0,88	0,881
9	333	0,95	0,957
10	370	1,03	1,029
XENON $T_i = 221^{\circ}\text{K}$			
1	221	1,75	1,740
2	442	3,29	3,261
3	663	4,65	4,531
4	884	5,81	5,633

Tableau 6

Comparaison des valeurs théoriques et expérimentales du coefficient de viscosité cinétique (en Décapoise) ($\gamma' = 0,74$).

ARGON $T_i = 119,8^\circ\text{K}$			
T/T_i	$T\ ^\circ\text{K}$	$\mu_{\text{exp}} \cdot 10^{+5}$	$\mu_{\text{th}} \cdot 10^{+5}$
1	119,8	0,99	1,019
2	239,6	1,87	1,902
3	359,4	2,63	2,600
4	479,2	3,28	3,198
5	599,0	3,83	3,733
6	718,8	4,32	4,224
7	838,6	4,77	4,680
8	958,4	5,17	5,109
9	1078,2	5,56	5,516
10	1198	5,94	5,904
OXYGENE $T_i = 117,5^\circ\text{K}$			
1	117,5	0,89	0,916
2	235	1,64	1,709
3	352,5	2,37	2,337
4	470	2,96	2,875
5	587,5	3,43	3,356
6	705	3,82	3,797
7	822,5	4,18	4,207
8	940	4,55	4,592
9	1057,5	4,89	4,958
10	1175	5,22	5,307
AZOTE $T_i = 95,05^\circ\text{K}$			
1	95,05	0,66	0,674
2	190,1	1,24	1,258
3	285,15	1,72	1,720
4	380,20	2,13	2,116
5	475,25	2,50	2,470
6	570,3	2,82	2,795
7	665,35	3,10	3,096
8	760,4	3,38	3,380
9	855,45	3,65	3,650
10	950,5	3,89	3,907

Tableau 6 (suite)

NEON $T_i = 35,6^\circ\text{K}$			
T/T_i	$T \text{ }^\circ\text{K}$	$\mu_{\text{exp}} \cdot 10^{+5}$	$\mu_{\text{th}} \cdot 10^{+5}$
1	35,6	0,59	0,611
2	71,2	1,08	1,141
3	106,8	1,50	1,560
4	142,4	1,87	1,920
5	178	2,18	2,241
6	213,6	2,49	2,535
7	249,2	2,77	2,809
8	284,8	3,06	3,067
9	320,4	3,32	3,311
10	356	3,57	3,544
HYDROGENE $T_i = 37^\circ\text{K}$			
1	37	0,16	0,175
2	74	0,33	0,328
3	111	0,44	0,448
4	148	0,54	0,552
5	185	0,63	0,644
6	222	0,72	0,729
7	259	0,80	0,808
8	296	0,88	0,882
9	333	0,95	0,952
10	370	1,03	1,019
XENON $T_i = 221^\circ\text{K}$			
1	211	1,75	1,734
2	442	3,29	3,236
3	663	4,65	4,425
4	884	5,81	5,443

Valeurs du coefficient α

Tableau 7

Gaz	T_i (en $^\circ\text{K}$)	α ($\gamma = 0,9$)	α ($\gamma' = 0,74$)
A	119,8	1,18	1,32
Ne	35,6	1,24	1,34
Xe	221	1,15	1,29
N ₂	95,05	1,13	1,27
O ₂	117,5	1,04	1,19
H ₂	37	1,21	1,31

VII.2.4. - Vérification du modèle linéaire

A l'aide du modèle linéaire nous avons obtenu l'expression suivante de la viscosité μ_c d'un gaz dilué

$$(6,11) \quad \mu_c = \frac{3}{64 \alpha \sigma_m^2} \left(\frac{m KT}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{e^{\frac{T_i}{T}} \int_0^\infty \left(\lambda^2 + \frac{T_i}{T} \right)^{1/2} e^{-\lambda^2} \lambda^2 d\lambda}$$

Compte tenu du modèle physique du potentiel d'interaction les températures d'interaction T_i choisies, sont voisines de celles recommandées par HIRSCHFELDER [7] pour les calculs du second coefficient de viriel à l'aide d'un potentiel de puits rectangulaire (soit $T_i = 69,4^\circ\text{K}$ dans le cas de l'argon).

Dans le tableau 8 figurent les valeurs expérimentales données par le Handbook of Chemistry and Physics [50] et les valeurs théoriques du coefficient de viscosité de l'argon.

La valeur optimisée de la température d'interaction T_i utilisée dans les calculs vaut $T_i = 75^\circ\text{K}$ (figure 4).

Tableau 8

Comparaison entre les valeurs théoriques et expérimentales (argon)

T °K	$\mu \cdot 10^5$ Valeurs théoriques	$\mu \cdot 10^5$ valeurs expérimentales
273,15	2,090	2,096
293,15	2,221	2,217
373,15	2,701	2,695
473,15	3,226	3,223
575,15	3,700	3,685
674,15	4,115	4,115
766,15	4,470	4,484
857,15	4,800	4,815
987,15	5,236	5,257
1100,15	5,590	5,632

Ces résultats sont excellents. Les écarts relatifs entre les valeurs expérimentales et théoriques des coefficients de viscosité sont inférieurs à 1 %. D'autre part, la valeur de α donnant le coefficient de viscosité théorique à $674,15^\circ\text{K}$ coïncidant avec la valeur expérimentale est $\alpha = 0,234$.

Remarque : Les valeurs théoriques de μ pour différentes valeurs de T_i sont données par la figure 4. Signalons en outre que pour $T_i = 60^\circ\text{K}$ les écarts relatifs sont inférieurs à 4 %.

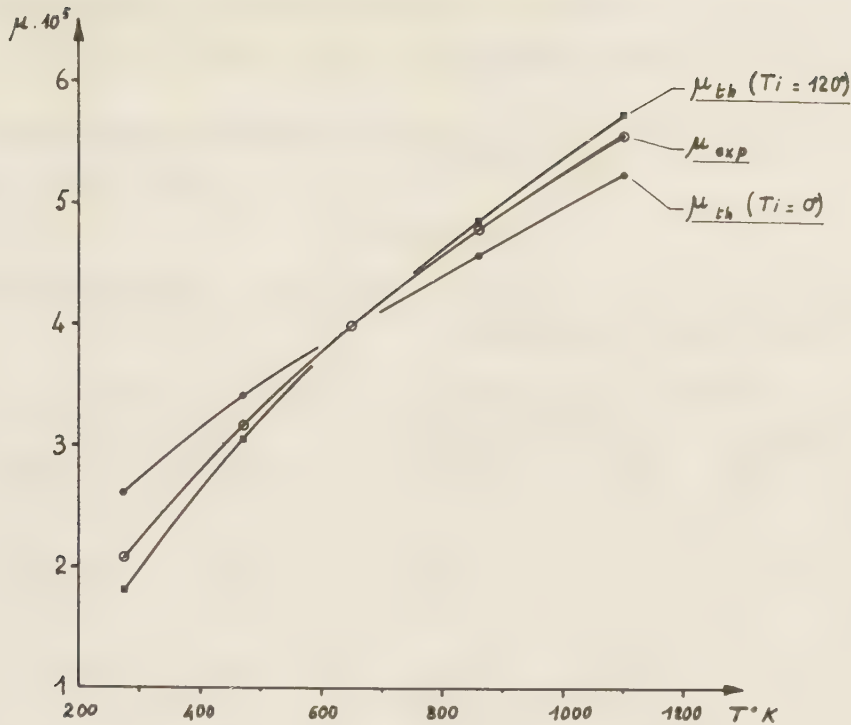


Figure 4

Coefficients de viscosité de l'argon en fonction de T pour différentes valeurs de T_i (modèle linéaire)

VII.3. - COMPARAISON AVEC L'EXPERIENCE - CAS DES LIQUIDES

Les valeurs expérimentales de la viscosité des liquides ont fait l'objet de peu de publications. Nous limitons donc notre comparaison à l'argon liquide pour lequel LOWRY [9], DAVID [10] et SAJI [11] ont présenté suffisamment de résultats intéressants.

Les valeurs de T_i et σ choisies sont celles recommandées par HIRSCHFELDER

$$T_i = 119,8^\circ K$$

$$\sigma = 3,405 \cdot 10^{-10} \text{ m.}$$

La valeur du coefficient sans dimensions β de l'expression du temps collisionnel

$$(6,21) \quad \tau = \beta \frac{h}{KT}$$

est prise égale à 0,44.

Dans le tableau 9 figurent :

- les valeurs des viscosités μ cinétiques et interparticulaires obtenues à partir de la valeur expérimentale et de la relation (7,4) donnant le produit $\mu_{in} \mu_c$.
- la comparaison des valeurs expérimentales et théoriques de la viscosité.

Tableau 9

Comparaison entre les valeurs théoriques et expérimentales de la viscosité μ de l'argon liquide (en Décapoise).

densité (g/cm ³)	T (°K)	pression (kg/cm ²)	viscosité exp. (.10 ⁴)	viscosité interpart. (.10 ⁴)	viscosité cinétique (.10 ⁴)	viscosité théorique (.10 ⁴)	écart relatif
1,062	140,4	108	0,71	0,682	0,029	0,694	- 0,057
	133,4	47	0,71	0,683	0,027	0,718	+ 0,012
1,068	145,4	153	0,73	0,701	0,029	0,646	- 0,115
	137,9	91	0,72	0,692	0,028	0,694	- 0,036
	131,2	27	0,74	0,714	0,026	0,744	+ 0,005
1,287	112,3	136	1,49	1,474	0,016	1,370	- 0,082
	110,4	119	1,50	1,485	0,015	1,405	- 0,063
	105	40	1,53	1,516	0,014	1,527	- 0,002
1,402	90,5	99	2,36	2,351	0,009	2,364	+ 0,002
	88,7	58	2,43	2,421	0,009	2,456	+ 0,011
	86,7	19	2,56	2,552	0,008	2,567	+ 0,003
1,410	91,8	155	2,41	2,401	0,009	2,328	- 0,034
	89,1	98	2,45	2,441	0,009	2,463	+ 0,005
	87,7	66	2,54	2,532	0,008	2,539	- 0,000

On constate que la viscosité interparticulaire domine ce qui justifie la formule (7,5)

$$\mu \simeq \mu_{in} = \tau \frac{KT C n^2}{2}$$

Par ailleurs la méthode semi-quantique, quoique discutable, conduit à un accord satisfaisant avec l'expérience.

Coefficient de viscosité χ

L'approximation $\Psi = e^{-\frac{\varphi}{KT}}$ conduit à la relation $\frac{\chi_{in}}{\mu_{in}} = \frac{5}{3}$.

Les valeurs expérimentales du rapport $\frac{\chi}{\mu}$ de l'argon liquide données par NAUGLE, LUNSFORD et SINGER [12] se situent largement autour de la valeur théorique. Pour des densités variant de 1,062 à 1,413 le rapport $\frac{\chi}{\mu}$ décroît de 2,43 à 0,89.

Ce désaccord peut être attribué au terme $\int \frac{\partial \Psi}{\partial \lg n} \frac{d\varphi}{dr} r^3 dr$ de la formule (7,1) que nous avons négligé.

VII.4. - CAS DES GAZ MODEREMENT DENSES

Le coefficient de viscosité est donné par la relation (7,1 ter)

$$(7,1 \text{ ter}) \quad \mu = \mu_0 \frac{\tau_0 B_0}{\tau_B} + \frac{m KT}{20} \frac{n^2 \sigma^2}{\mu_0} \frac{B}{B_0} \frac{\tau}{\tau_0}$$

avec

$$(6,22 \text{ bis}) \quad \frac{\tau}{\tau_0} = 1 - \lambda_1 n \sigma^3$$

$$(7,6) \quad \frac{B}{B_0} = e^{\frac{5}{12} \pi n \sigma^3 (1 - \lambda_2 \frac{T_i}{T})}$$

Les tableaux 10, 11 et 12 comparent les valeurs expérimentales de μ données par FLYNN [22] aux valeurs théoriques données par les formules ci-dessus.

Les calculs sont effectués dans le cas de l'argon, de l'azote et du néon.

Les paramètres caractéristiques du potentiel d'interaction sont ceux donnés par HIRSCHFELDER [7] pour un potentiel de LENNARD-JONNES, c'est-à-dire :

pour l'argon	($T_i = 119,8$	$\sigma = 3,405 \cdot 10^{-10} \text{ m}$)
l'azote	($T_i = 95,05$	$\sigma = 3,698 \cdot 10^{-10} \text{ m}$)
le néon	($T_i = 35,6$	$\sigma = 2,749 \cdot 10^{-10} \text{ m}$).

Compte tenu des résultats obtenus précédemment pour les gaz dilués, nous avons effectué les calculs avec les valeurs expérimentales de μ_0 .

Nous constatons que l'accord est satisfaisant. D'autre part les constantes λ_1 et λ_2 optimisées valent respectivement :

$$\lambda_1 = 1,6$$

$$\lambda_2 = 1$$

Tableau 10

Comparaison entre les valeurs théoriques et expérimentales de la viscosité de l'argon (en Décapoise).

Température (°K)	Pression atmosph.	Densité	viscosité expériment. (.10 ⁵)	viscosité théorique (.10 ⁵)	Ecart relatif
373,15	36,61	0,04792	2,775	2,782	+ 0,003
373,15	91,55	0,11981	2,900	2,904	+ 0,001
373,15	166,60	0,21566	3,124	3,122	- 0,000
298,15	28,84	0,04792	2,316	2,319	+ 0,001
298,15	84,36	0,14377	2,494	2,479	- 0,006
298,15	138,94	0,23962	2,730	2,697	- 0,012
248,15	34,93	0,07189	2,027	2,022	- 0,002
248,15	87,35	0,19169	2,276	2,238	- 0,017
248,15	156,24	0,35943	2,770	2,693	- 0,028
223,15	30,90	0,07189	1,850	1,848	- 0,001
223,15	91,01	0,23962	2,219	2,165	- 0,024
223,15	152,13	0,43133	2,879	2,752	- 0,044

Tableau 11

Comparaison entre les valeurs théoriques et expérimentales de la viscosité de l'azote (en Décapoise).

Température (°K)	Pression atmosph.	Densité	viscosité expériment. (.10 ⁵)	viscosité théorique (.10 ⁵)	Ecart relatif
373,15	26,35	0,02396	2,133	2,138	+ 0,003
373,15	80,52	0,07189	2,213	2,241	+ 0,013
373,15	137,76	0,11981	2,331	2,383	+ 0,022
298,15	6,77	0,00789	1,781	1,781	- 0,000
298,15	41,67	0,04792	1,839	1,851	+ 0,006
298,15	62,58	0,07189	1,887	1,903	+ 0,009
248,15	33,93	0,04792	1,607	1,618	+ 0,007
248,15	83,40	0,11981	1,766	1,792	+ 0,014
248,15	152,54	0,21566	2,072	2,154	+ 0,039
223,15	29,99	0,04792	1,485	1,491	+ 0,004
223,15	85,93	0,14377	1,714	1,733	+ 0,115
223,15	143,78	0,23962	2,054	2,124	+ 0,035

Tableau 12

Comparaison entre les valeurs théoriques et expérimentales de la viscosité du néon (en Décapoise).

Température (°K)	Pression atmosp.	Densité	Viscosité expériment. (.10 ⁵)	Viscosité théorique (.10 ⁵)	Ecart relatif
373,15	55,79	0,02396	3,702	3,715	+ 0,003
373,15	154,83	0,09585	3,747	3,815	+ 0,018
298,15	59,75	0,04792	3,201	3,222	+ 0,007
298,15	156,29	0,11981	3,267	3,326	+ 0,018
248,15	49,57	0,04792	2,827	2,839	+ 0,005
248,15	143,15	0,13179	2,894	2,955	+ 0,021
223,15	55,94	0,05991	2,643	2,658	+ 0,006
223,15	140,66	0,14377	2,724	2,775	+ 0,020

CONCLUSION

L'équation cinétique F.S. établie à partir d'une nouvelle hypothèse de fermeture permet de décrire de manière correcte les propriétés d'un fluide dense ou dilué.

Elle permet d'obtenir des expressions très simples des coefficients de viscosité cinétique et interparticulaire en bon accord avec l'expérience, alors que l'équation de BOLTZMANN habituelle ne convient qu'aux gaz dilués et son application à l'évaluation des coefficients de viscosité nécessite des calculs très lourds.

Les écarts relatifs entre les valeurs expérimentales et théoriques des coefficients de viscosité sont inférieurs à 1 % pour les gaz dilués et à 6 % pour l'argon liquide. Toutefois, nous avons recours à une constante de proportionnalité ajustée expérimentalement.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] YVON J.
Les corrélations et l'entropie
Dunod Paris, 1966
Cours de Mécanique Statistique
Faculté des Sciences Paris
- [2] KIRKWOOD J.C.
J. Chem. Phys., 1946, 14, 180
J. Chem. Phys., 1947, 15, 72
- [3] BOGOLIUBOV N.
J. Phys. USSR, 1946, 10, 265
- [4] BHATNAGAR, GROSS, KROOK
Phys. Rev., 1954, 94, 511
- [5] DELCROIX
Physique des plasmas
Dunod
- [6] GRAD H.
Comm. Pure and Appl. Math., 1949, 2, 331
- [7] HIRSCHFELDER, CURTIS, BIRD
Molecular Theory of Gases and liquids
- [8] HILSEN RATH J.
Tables of Thermodynamic and Transport Properties, 1960
- [9] LOWRY, RICE, GRAY
J. Chem. Phys., 1964, 40, 2673
- [10] DAVIS, LUKS
J. Chem. Phys., 1965, 69, 869

- [11] SAJI, KOBAYASHI
Cryogenics, 1964, 4, 136
- [12] NAUGLE, LUNSFORD, SINGER
J. Chem. Phys., 1966, 45, 4669
- [13] LOWRY, RICE, GRAY
J. Chem. Phys., 1964, 40, 12
- [14] RICE ALLNATT
J. Chem. Phys., 1961, 34, 6
- [15] RICE
Molecular Phys., 1961, 4, 305
- [16] LEBOWITZ, FRISCH, HELFAND
Phys. of Fluids, 1966, 3, 3
- [17] SALMON, FREY
Nuovo Cimento, 1967, X, 51B, 437
- [18] DORMONT, FREY, SALMON, VALTON
C.R. Acad. Sci. Paris, 21 mai 1967, 264
- [19] SALMON, FREY
J. of Phys. Soc. Japan, 1969, 26, 293
- [20] LAIGLE
Mémoire du CNAM, 1969
- [21] GARNACHE
Mémoire CESM, 1969
- [22] FLYNN, HANKS, LEMAIRE, ROSS
J. Chem. Phys., 1963, 38, 154
- [23] TA-YOU WU
Kinetic Equations of Gases and Plasmas, 1966
- [24] CHAPMAN, COWLING
The Mathematical Theory of non uniform gases, 1939
- [25] ROSTOKER, ROSEN BLUTH
Phys. Fluids, 1960, 3, 1
- [26] KUBO
Statistical Mechanics, 1965

- [27] SCHRAM
Kinetic Equations for plasma Euratom, 1964
- [28] RICE
Molecular Physics, 1961, 4, 305
- [29] HELFAND
Phys. Fluids, 1961, 4, 681
- [30] COWRY, RICE, GRAY
J. Chem. Phys., 1964, 40, 3673
- [31] RICE, GRAY
The Statistical Mechanics of Simple Fluids, 1961
- [32] ZWANZIG, KIRKWOOD and all
J. Chem. Phys., 1953, 21, 2050
- [33] RICE, FRISCH, LEBOWITZ
J. Chem. Phys., 1959, 31, 369
- [34] KUBO, YOKOTA, NAKAJIMA
J. Phys. Soc. Japan, 1957, 12, 1203
- [35] MANDEL, COLLINS
J. Chem. Phys., 1960, 32, 1796
- [36] UHLENBECK, FORD
Lectures in Statistical Mechanics, Providence, R.I. Am. Math. Soc., 1963
- [37] CHANDRASEKHAR
Rev. Modern Phys., 1943, 15, 1
- [38] TER HAAR D.
Elements of Statistical Mechanics
- [39] VAN KAMPEN N.G.
Fundamental Problems in Statistical Mechanics, 1962
- [40] MASSIGNON
Mécanique Statistique des fluides, 1957
- [41] HANLEY, CHILDS
Technical note 352, National Bureau Standards, 1967
- [42] LONGUET, HUGGINS, VALLEAU
Molecular Phys., 1958, 1

- [43] LONGUET, HIGGINS, VALLEAU
J. Chem. Phys., 1956, 25, 884
- [44] RAHMAN
Phys. Rev., 1964, A136, 405
- [45] JOHNSTON, GRILLY
J. of Phys. Chem., 1942, 46, 948
- [46] ROWLINSON
Mol. Phys., 1964, 7, 477
- [47] TRAUTZ, BINKELE
Ann. Phys., 1930, 5, 561
- [48] TRAUTZ, MELSTER, ZINK
Ann. Phys., 1930, 7, 409
- [49] TIMOSHENKO
Théorie de l'élasticité
Librairie Polytechnique Béranger, 1961
- [50] WEAST, SELBY
Handbook of Chemistry and Physics

Manuscrit reçu le 3 mars 1970

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

Vu et approuvé

Paris, le 12 février 1970

Le Doyen de la Faculté des Sciences
de Paris

Marc ZAMANSKY

Vu

et Permis d'Imprimer

Le Recteur de l'Académie
de Paris

Robert MALLET

